

# Erweiterung der hydrodynamischen Schmiertheorie durch Einbeziehung des Unterdruckgebietes in die Berechnung instationär belasteter Gleitlager

Inaugural-Dissertation zur Erlangung des akademischen Grades Doktor eines Wissenschaftszweiges (Doktor-Ingenieur)

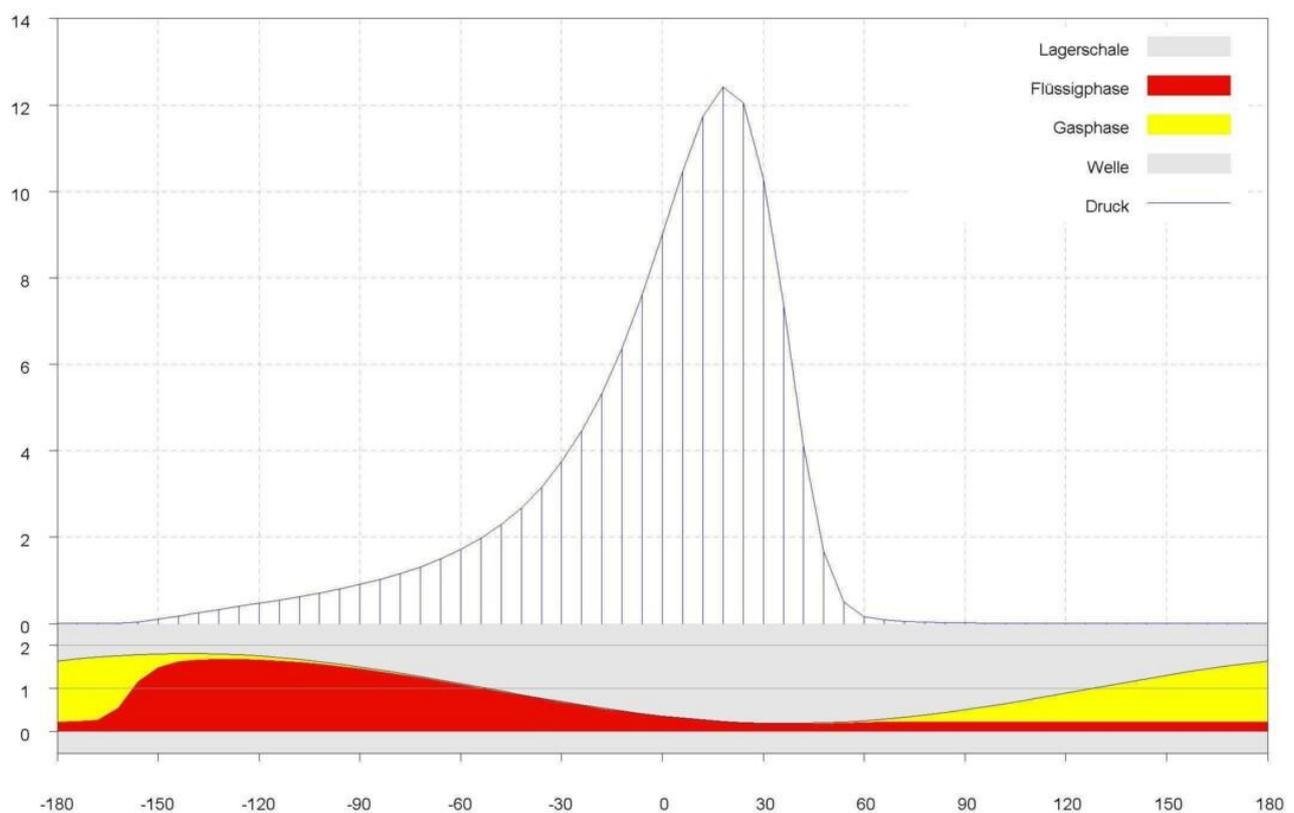
vorgelegt der Fakultät für Mathematik, Physik und technische Wissenschaften des wissenschaftlichen Rates der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock

von

**Dipl.-Ing. Roland Wegmann**

geb. am 16.11.1950 in Borna

Rostock, Juli 1978 (Reprint: Juni 2008, Juni 2020<sup>1</sup>)



<sup>1</sup> Es wurden einige Schreibfehler beseitigt und das Bild- und Tabellenverzeichnis mit Seitenzahlen versehen.

## **Kurzreferat**

Die Schmiermittelströmung im Gleitlager im Bereich des aufgerissenen Schmierfilms wird durch zwei Modelle beschrieben. Modell 1 nimmt an, daß das Schmiermittel ein Gemisch aus Flüssigkeit und Gas ist. Modell 2 beschreibt das Schmiermittel als eine Flüssigkeit mit idealer Kavitation. Beide Modelle werden begründet, mathematisch dargestellt und miteinander verglichen. Dadurch wird das Problem der Randbedingungen in der hydrodynamischen Schmiertheorie gelöst. Für das Modell 1 wird ein numerisches Lösungsverfahren angegeben. Es werden einige Berechnungsergebnisse gezeigt und diskutiert.

## **Thesen zur Dissertation**

Thema: „Erweiterung der hydrodynamischen Schmiertheorie durch Einbeziehung des Unterdruckgebietes in die Berechnung instationär belasteter Gleitlager“

1. Der Übergang von der Berechnung stationär belasteter Gleitlager zur Berechnung instationär belasteter Gleitlager macht die Lösung des Problems der Randbedingungen der bisherigen hydrodynamischen Schmiertheorie und die Einbeziehung des Unterdruckgebietes in die Berechnung erforderlich.
2. Das Strömungsmodell 1, welches das Schmiermittel als ein Flüssigkeits-Gas-Gemisch darstellt, und das Strömungsmodell 2, welches das Schmiermittel als eine Flüssigkeit mit idealer Kavitation darstellt, sind in der Lage diese Probleme zu lösen und erweitern die Theorie der hydrodynamischen Schmierung.
3. Beide Modelle stimmen trotz verschiedener Annahmen gut überein und ergänzen einander in ihrer Aussagefähigkeit.
4. Vergleiche mit Experimenten anderer Autoren bestätigen die Erweiterung der Theorie.
5. Das Modell 1 ist nach der Linearisierung der Differentialgleichung für den Druckverlauf mit Hilfe des Differenzenverfahrens lösbar, wodurch seine praktische Anwendung möglich wurde.
6. Die Anwendung der erweiterten Theorie auf stark instationär belastete Lager u.a. auf das wechselnd belastete Gleitgelenk ergeben erhebliche Unterschiede zur bisherigen Theorie. Es zeigt sich, daß hier die Bedingungen für die Schmiermittelversorgung an Bedeutung für die Tragfähigkeit des Lagers gewinnen.
7. Es ergeben sich Möglichkeiten der Optimierung der Schmiernutanordnung und des Ölzufuhrdrucks. Es wurde z.B. gezeigt, daß ein wechselnd belastetes Gleitgelenk bei einer verringerten tragenden Schmierspaltfläche durch verbesserte Ölzufußbedingungen in der Lage sein kann, größere Belastungen aufzunehmen, als ein entsprechendes Lager mit größerer tragender Spaltfläche und damit ungünstigeren Ölzufußbedingungen.

# Inhaltsverzeichnis

Kurzreferat .....	2
Thesen zur Dissertation .....	2
Inhaltsverzeichnis .....	3
Symbolverzeichnis .....	4
1 Zur Aufgabenstellung .....	6
1.1 Notwendigkeit der Erweiterung der hydrodynamischen Schmiertheorie .....	6
1.2 Einordnung der Aufgabenstellung in die Gleitlagerforschung .....	6
2 Stand der Erkenntnisse .....	7
2.1 Bisherige hydrodynamische Schmiertheorie und die verwendeten Randbedingungen .....	7
2.2 Verhalten des Schmiermittels im Unterdruckgebiet .....	9
3 Zwei Modelle der Schmiermittelströmung .....	10
3.1 Modell1 (Flüssigkeits-Gas-Gemisch) .....	11
3.2 Modell 2 (Kavitation) .....	11
3.3 Zu beiden Modellen .....	12
4 Mathematische Darstellung des Strömungsmodells 1 (Flüssigkeits-Gas-Gemisch) .....	12
4.1 Füllungsgrad .....	12
4.2 Volumen-Druck-Gesetz und Mischungskonstante .....	13
4.3 Viskosität des Gemischs .....	13
4.4 Kräfte am Schmiermittelelement .....	14
4.5 Strömungsgeschwindigkeiten .....	15
4.6 Kontinuitätsbedingung .....	16
4.7 Differentialgleichung für den Druckverlauf .....	18
5 Mathematische Darstellung des Strömungsmodells 2 (Kavitation) .....	20
5.1 Volumen-Druck-Gesetz, Füllungsgrad .....	20
5.2 Das Gebiet $p > 0$ (Druckberg) .....	20
5.3 Das Gebiet $p = 0$ (Unterdruckgebiet) .....	21
5.4 Übergangsbedingungen .....	23
5.5 Der Unterschied zwischen Druckberganfang und Druckbergende .....	26
6 Weitere Formeln .....	29
6.1 Spaltgeometrie .....	29
6.2 Resultierende Lagerbelastung .....	30
6.3 Gesamtfüllungsgrad .....	31
7 Numerisches Lösungsverfahren .....	31
7.1 Allgemeines .....	31
7.2 Grundprinzip der numerischen Lösung der nichtlinearen Differentialgleichung des Modells 1 .....	32
7.3 Linearisierung der Differentialgleichung des Modells 1 .....	32
7.4 Differenzenverfahren .....	35
7.5 Berücksichtigung von Schmiernuten .....	36
8 Gemeinsame Unterschiede der beiden Modelle gegenüber der bisherigen hydrodynamischen Schmiertheorie und neue Untersuchungsmöglichkeiten, die sich daraus ergeben .....	37
9 Vergleich der beiden Modelle miteinander .....	37
9.1 Mathematischer Zusammenhang der Modelle .....	38
9.2 Vergleich anhand eines Beispiels .....	39
9.3 Untersuchungen zum Druckberganfang .....	40
9.4 Schlußfolgerungen aus dem Vergleich .....	41
10 Einfluß der Mischungskonstanten $C$ .....	41

11	Überprüfung der Theorie anhand der Experimente von Cole und Hughes, Anwendbarkeit der Theorie bei Blasenansammlung im Unterdruckgebiet .....	42
12	Das instationär belastete Lager .....	44
12.1	Das wechselnd belastete Gleitgelenk ohne Drehung .....	44
12.2	Das instationär belastete Lager mit unrunder Welle .....	46
13	Zusammenfassung .....	46
	Literaturverzeichnis .....	47
	Verzeichnis der Abbildungen .....	48
	Verzeichnis der Tafeln .....	49

## Symbolverzeichnis

### dimensions- dimensionslos behaftet

a		Schmierspaltfläche
	A1,A2,A3,A4	Koeffizienten der linearisierten Differentialgleichung für den Druckverlauf
b	B	Lagerbreite
c	C	Mischungskonstante
	C1 ... C13	Hilfsgrößen
d		Wellendurchmesser
e	E	Exzentrizität
f		Lagerbelastung
f1,f2	F1,F2	Komponenten der Lagerbelastung im lagerschalengefesten Koordinatensystem 1-2
	F	örtlicher Füllungsgrad
	Fa	örtlicher Füllungsgrad an der Stelle Xa
	Fges	Gesamtfüllungsgrad
	FH	Flüssigkeitsverteilung $FH=F \cdot H$
	FHges	Gesamtflüssigkeitsmenge im Schmierspalt
	G	Hilfsgröße
h	H	Schmierspalthöhe
hmin,hmax	Hmin,Hmax	minimale bzw. maximale Spalthöhe
	i	Laufvariable
	KX,KZ	Steuerfelder
	NT	Anzahl der berechneten Zeitpunkte
	NX,NZ	Anzahlen der Stützstellen im Netz der Berechnungspunkte in x- bzw. z-Richtung
p	P	Schmierfilmdruck
	Pa,Pe	Druck am Schmierspaltanfang bzw. -ende
	Pr1,Pr2,Pr3	Druck am Schmierspaltrand bzw. in einer Schmier- nut
	Pn	Näherungswert für den Schmierfilmdruck
	$PnX$	$=\partial Pn/\partial X$
	$PnT$	$=\partial Pn/\partial T$
	PX	$=\partial P/\partial X$

	PT	$=\partial P/\partial T$
r		Radius der Welle
r1		Radius der Lagerschale
	R	rechte Seite der Differentialgleichung für den Druckverlauf
s	S	Lagerspiel
	So	Sommerfeldzahl
	Som	mittlere Sommerfeldzahl während eines Lastspiels
t	T	Zeit
u,v,w		Komponenten der Strömungsgeschwindigkeit im lagerschalenfesten Koordinatensystem x-y-z
um,wm	Um,Wm	mittlere Strömungsgeschwindigkeiten
uw	$\Omega$	Relativgeschwindigkeit zwischen Welle und Lagerschale
u1,w1	U1,W1	Verschiebungsgeschwindigkeiten der Druckberggrenze allgemein bzw. des Druckberganfangs
u2,w2	U2,W2	Verschiebungsgeschwindigkeiten des Druckbergendes
v		Volumen des Schmierspaltenelementes
vf		Flüssigkeitsvolumen im Schmierspaltenelement v
vg		Gasvolumen im Schmierspaltenelement v
x,y,z	X,Z	Koordinaten des lagerschalenfesten Koordinatensystems x-y-z
xa,xe	Xa,Xe	Koordinaten des Schmierspaltanfangs bzw. -endes
	XSo	Stelle (Richtung) der resultierenden Lagerbelastung
x0		Stelle der minimalen Schmierspalthöhe
x1,z1	X1,Z1	Koordinaten der Druckberggrenze, allgemein bzw. des Druckberganfangs, speziell
x2,z2	X2,Z2	Koordinaten des Druckbergendes
za,ze	Za,Ze	Koordinaten der Schmierspalttränder
	$\gamma$	Verlagerungswinkel
	$\Delta T$	Zeitschrittweite
	$\Delta X, \Delta Z$	Netzteilung in x- bzw. z-Richtung
$\tau_{yz}, \tau_{yx}$		Schubspannungen am Schmiermittelelement
$\eta$		dynamische Viskosität der blasenfreien Schmierflüssigkeit
$\eta_g$		dynamische Viskosität des Flüssigkeits-Gas-Gemisches
$\omega$	$\Omega$	relative Winkelgeschwindigkeit zwischen Welle und Lagerschale
$\omega_b$		Bezugswinkelgeschwindigkeit

# 1 Zur Aufgabenstellung

## 1.1 Notwendigkeit der Erweiterung der hydrodynamischen Schmiertheorie

Die hydrodynamische Schmiertheorie zählt zu den klassischen Anwendungen der Strömungsmechanik. Sie hat sich zur Berechnung der Gleitlager allgemein durchgesetzt und hat durch die theoretische Erklärung der Vorgänge im Schmierpalt wesentlich zur Weiterentwicklung der Gleitlager beigetragen.

Seit der ersten praktischen Anwendung dieser Theorie trat jedoch ein Problem auf, was bisher nicht gelöst wurde und durch die Forderung der Praxis, instationär belastete Gleitlager zu berechnen, ständig an Bedeutung gewinnt. Es ist das Problem der Randbedingungen: Bei der Anwendung der Reynolds'schen hydrodynamischen Schmiertheorie ist es notwendig, Randbedingungen für den Anfang und das Ende des Druckberges im Schmierpalt anzugeben, um dadurch die Berechnung negativer Drücke (Zugspannungen) im Schmierfilm zu vermeiden. Derartige Randbedingungen wurden für die Berechnung stationär belasteter Gleitlager eingeführt und später für instationär belastete Lager formal übernommen, was ein Problem ist.<sup>2</sup>

Außerdem werden durch die Randbedingungen die Erscheinungen im Unterdruckgebiet aus den Untersuchungen ausgeschlossen. Diese spielen aber eine Rolle bei der Versorgung des Lagers mit Schmiermittel und damit bei der Bildung eines geschlossenen Schmierfilms im tragenden Bereich des Lagers.

Innerhalb der Gleitlagerforschung des Wissenschaftsbereichs Konstruktion und Schiffsentwurf bestand die Aufgabe, die Tragfähigkeitsverluste von Gleitlagern zu untersuchen, deren Welle und Lagerschale technologisch bedingt von der ideal kreisrunden Form abweichen. Bei der Anwendung der bisherigen Theorie auf derartige Lager, in denen bei einer beliebigen, zeitlich veränderlichen Spaltform möglicherweise mehrere Spaltminima und –maxima auftreten, ist die Lage des Druckberges nicht mehr einfach zu überschauen. Deshalb ist es hier nicht zulässig, die üblichen Randbedingungen formal zu übernehmen.

Zur Lösung dieses Problems muß die Reynolds'sche Schmiertheorie erweitert werden, indem das Unterdruckgebiet vollständig in die Berechnungen einbezogen wird, so daß die Randbedingungen, die bisher aufgrund einfacher Überlegungen angenommen wurden, innerhalb der Berechnung exakt bestimmt werden können.

Da es sich hierbei um Grundlagen zur Theorie der hydrodynamischen Schmierung handelt, gehen die Anwendungsmöglichkeiten über das oben genannte spezielle Problem der unrunder Gleitlager, das den Anlaß der Untersuchungen gab, hinaus. Deshalb wird die Erweiterung der Schmiertheorie als Gegenstand dieser Arbeit getrennt vom Problem der unrunder Lager behandelt. Über die Ergebnisse der Untersuchung unrunder Lager unter Anwendung der erweiterten Theorie wurde an anderer Stelle [25] bereits berichtet.

## 1.2 Einordnung der Aufgabenstellung in die Gleitlagerforschung

Ende des 19. Jahrhunderts wurde die hydrodynamische Schmiertheorie von Petroff [1], Reynolds [2] und Sommerfeld [3] entwickelt. Damit wurde die wissenschaftliche Behandlung der Gleitlager möglich.

Die folgende zweite Phase der Gleitlagerforschung, die gegenwärtig noch andauert, ist gekennzeichnet durch viele spezielle Untersuchungen auf der Grundlage der bestehenden Theorie. Es werden experimentelle Untersuchungen zur Bestätigung durchgeführt. Die Gültigkeit von Annahmen wird quantitativ überprüft bzw. die Theorie wird präzisiert oder erweitert, indem einschränkende Annahmen weggelassen werden. Es werden spezielle Lagertypen untersucht z.B. Mehrgleitflächenlager, gasgeschmierte Lager und Lager mit

---

<sup>2</sup> Ausführliche Überlegungen dazu im Abschnitt 2.1

porösen Lagerschalen. Es werden Lösungsmethoden entwickelt. Bei allen diesen Untersuchungen besteht die Tendenz, vom stationär belasteten zum instationär belasteten Lager überzugehen, entsprechend den technischen Erfordernissen.

Die dritte Phase ist gekennzeichnet durch die Zusammenfassung der Erkenntnisse zu einer abgerundeten Theorie. Es werden ingenieurmäßige Berechnungsmethoden entwickelt, die bei einfacher Anwendbarkeit und optimalem Aufwand alle wesentlichen Einflußfaktoren berücksichtigen. Dabei stützt sich die Entscheidung, ob eine Erscheinung wesentlich oder unwesentlich ist und wie sie berücksichtigt wird, auf die Ergebnisse der Spezialuntersuchungen der zweiten Phase. Die dritte Phase stellt einen relativen Abschluß der Theorie dar und ist das ständige Ziel der Forschung.

Diese Bearbeitungsphasen gehen natürlich stark ineinander über. Während für die Dimensionierung stationär belasteter Gleitlager brauchbare ingenieurmäßige Methoden existieren, sind bei den instationär belasteten Gleitlagern noch einige Probleme offen, z.B. die Deformation der Lagerteile, die genaue Bestimmung der Verlagerungsbahn, die exakte experimentelle Bestimmung der Spalthöhe.

Entsprechend der oben gemachten Unterteilung ist die vorliegende Arbeit in die zweite Phase der Gleitlagerforschung einzuordnen. Dabei entspricht sie der Tendenz, verstärkt instationär belastete Gleitlager zu untersuchen. Die Gleichungen sollen dabei möglichst allgemein entwickelt werden, so daß Erscheinungen und Einflüsse, die hier nicht untersucht werden, bei späteren Untersuchungen berücksichtigt werden können.

## 2 Stand der Erkenntnisse

### 2.1 Bisherige hydrodynamische Schmiertheorie und die verwendeten Randbedingungen

In der hydrodynamischen Schmiertheorie wird davon ausgegangen, daß der Schmierspalt vollständig von einer inkompressiblen, Newtonschen Flüssigkeit ausgefüllt ist. Die Strömung wird als kriechend angenommen. Die Aufstellung des Kräftegleichgewichts am Schmiermittelelement, bestehend aus Schub- und Druckkräften und die Anwendung der Kontinuitätsbedingung führen dann zur Reynolds'schen Differentialgleichung für den Druckverlauf  $p(x,z,t)$  im Schmierspalt, die hier für das instationär belastete, endlich breite Lager angegeben ist.

$$(1) \quad 0 = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \frac{3}{h} \cdot \left( \frac{\partial h}{\partial x} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial z} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \right) - \frac{12 \cdot \eta}{h^3} \cdot \left( \frac{uw}{2} \cdot \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} \right)$$

Die Anwendung dieser Gleichung auf den gesamten Schmierspalt führt in der Regel in den Gebieten, wo sich der Spalt erweitert, zur Errechnung negativer Drücke, d.h. Zugspannungen in der Schmierflüssigkeit. Um das zu vermeiden, werden verschiedene Randbedingungen eingeführt (Bild 23, Anhang):

1. Sommerfeldsche Randbedingung: Der Druckberg beginnt an der Stelle der maximalen Spalthöhe. Der Druckberg endet an der Stelle der minimalen Spalthöhe

$$(2) \quad p(h_{\max}) = 0$$

$$(3) \quad p(h_{\min}) = 0$$

2. Reynolds'sche Randbedingung: Der Druckberg beginnt an der Stelle der maximalen Spalthöhe. Der Druckberg endet an der Stelle  $x_2$  hinter der Stelle der minimalen Spalthöhe, wo Druck und Druckanstieg gleichzeitig Null sind

$$(2) \quad p(h_{\max}) = 0$$

$$(4) \quad p(x_2) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial p(x_2)}{\partial x} = 0$$

3. Randbedingung: Die Berechnung des Drucks erfolgt über die gesamte Spaltfläche; anschließend werden alle negativen Werte Null gesetzt.

Die erste und die dritte Randbedingung verletzen bereits für den stationären Fall die Kontinuitätsbedingung am Druckbergende (Überlegungen dazu im Abschnitt 5.5.) Das wird durch die Forderung des glatten Auslaufes der Reynolds'schen Randbedingung berücksichtigt. Die Einhaltung dieser Bedingung erfordert aber einen erhöhten Aufwand, da das Ende  $x_2$  des Druckberges stets iterativ bestimmt werden muß. Deshalb werden die erste und die dritte Randbedingung häufiger verwendet.

Bei der Berechnung instationär belasteter Lager wird die Anwendung der Randbedingungen problematisch, da sich hier die Druckkomponenten der Keilwirkung (Druckaufbau durch Rotation der Welle, repräsentiert durch das Glied  $(uw/2) \cdot (\partial h / \partial x)$  der Reynolds'schen Gleichung) und der Verdrängungswirkung (Druckaufbau durch Annäherung der Welle an die Lagerschale, repräsentiert durch das Glied  $dh/dt$ ) überlagern und die Druckberggrenzen sich ständig verschieben. Die dritte Randbedingung läßt sich dabei formal am einfachsten anwenden. Sie ist hier jedoch auch fehlerhaft, denn die berechneten negativen Drücke wirken sich auf den berechneten Druck im positiven Bereich aus und verfälschen dadurch das Ergebnis, auch wenn sie anschließend Null gesetzt werden.

Da die Reynolds'sche Differentialgleichung linear ist, kann man eine Gesamtlösung durch Überlagerung von Teillösungen erzeugen. Häufig werden deshalb die Komponenten der Keilwirkung und der Verdrängungswirkung einzeln berechnet, wobei für jede Komponente extra Randbedingungen verwendet werden. Dabei wird für die reine Verdrängung eine neue Randbedingung eingeführt:

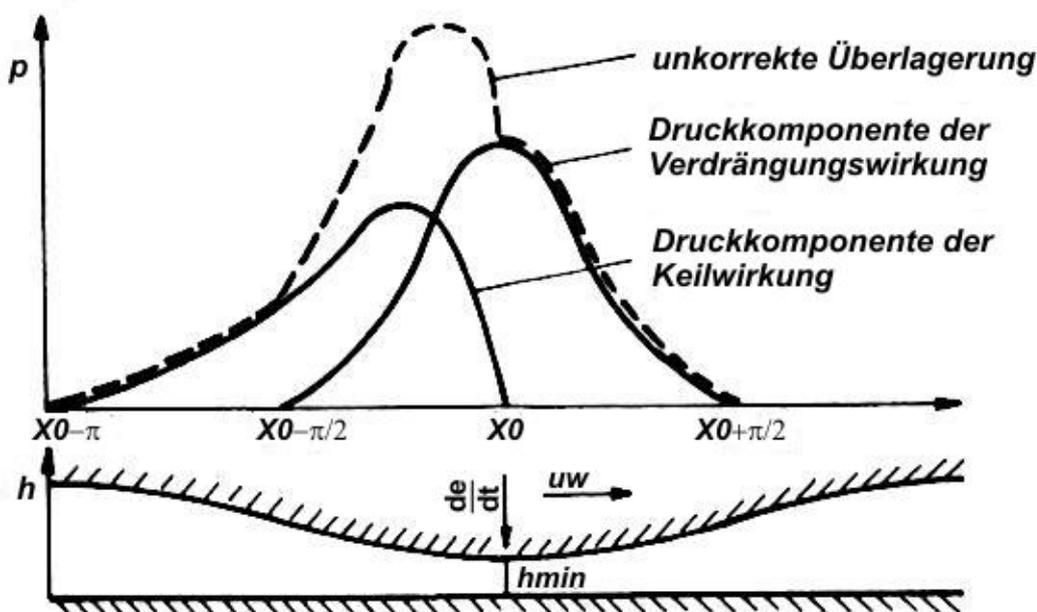
4. Randbedingung: Der Druckberg beginnt  $90^\circ$  vor und endet  $90^\circ$  hinter der minimalen Schmierpalthe

$$(5) \quad p(x_0 - \pi \cdot r/2) = 0$$

$$(6) \quad p(x_0 + \pi \cdot r/2) = 0$$

, wobei  $x_0 = x(h_{\min})$ .

Die anschließende Überlagerung der Druckkomponenten ist dann jedoch nicht mehr richtig (Bild 1).



**Bild 1: Unkorrekte Überlagerung der Druckkomponenten Keildruck und Verdrängungsdruck**

Diese Methode wird häufig bei der Berechnung von Verlagerungsbahnen aus einem vorgegebenen Belastungsverlauf angewendet, um die Berechnung zu vereinfachen.

Auf diese Weise wurde die Reynolds'sche Schmiertheorie bisher im allgemeinen auf Lager mit kreisrunder Welle und kreisrunder Lagerschale angewendet. Es ist zu erwarten, daß bei einer beliebigen Spaltkontur durch unrunde Welle und unrunde Schale bei formaler Anwendung der Randbedingungen sich der Fehler weiter vergrößert.

## 2.2 Verhalten des Schmiermittels im Unterdruckgebiet

Die Untersuchungen zum Verhalten des Schmiermittels im Unterdruckgebiet gehen in folgende Richtungen:

- 1) Es wird theoretisch und experimentell untersucht, ob und unter welchen Bedingungen Flüssigkeiten in der Lage sind, Zugspannungen aufzunehmen.
- 2) Das Verhalten des Schmiermittels wird am durchsichtigen Gleitlager beobachtet.
- 3) Der Schmierfilmdruck wird gemessen.

**Kornfeld** [8] untersucht die Zerreißspannungen in verschiedenen Flüssigkeiten. Aufgrund der Anziehungskräfte der Moleküle wären Flüssigkeiten in der Lage, Zugspannungen von ca. 10 000 N/cm<sup>2</sup> aufzunehmen. Berücksichtigt man das Vorhandensein von kleinen Gasblasen in der Flüssigkeit und die zugehörigen Oberflächenspannungen, so sinkt die Zugfestigkeit beträchtlich. Sie wird damit eine Funktion der größten Blase in der Flüssigkeit. Durch Messung der Zerreißspannungen nach verschiedenen Methoden weist Kornfeld für Mineralöl Zugspannungen von 0 bis 80 N/cm<sup>2</sup> nach. Dabei kommt er zu der Schlußfolgerung, daß Zugspannungen nur zu erreichen sind, wenn Gefäßwand und Flüssigkeit sehr rein sind und die Flüssigkeit weitgehend blasenfrei ist. Diese Bedingungen sind im Gleitlager nicht gegeben.

Hofmann [11] macht experimentelle Untersuchungen zur Festigkeit dünner Ölfilme zwischen zwei planparallelen Platten, die schlagartig getrennt werden. Er weist auch Zugspannungen nach, aber ebenfalls nur unter der Bedingung hoher Oberflächengüte und Sauberkeit und nach längerer Vorbelastung des Schmierfilms zur Beseitigung der Gasblasen.

In experimentellen Arbeiten wurden die Schmierfilmdrücke sowohl im stationär belasteten Lager [4], [6], [7], [21] als auch im instationär belasteten Lager [12], [13], [19] gemessen. In den stationär belasteten Lagern, wo die niedrigen Drücke im sich erweiternden Spalt gut erfaßt wurden, liegen diese zwischen dem atmosphärischen und dem Dampfdruck im Bereich von 3 bis 6 N/cm<sup>2</sup> (absoluter Druck) [6], [7]. Bei den Messungen an instationär belasteten Lagern konnten keine negativen Drücke nachgewiesen werden, da die Schwankungen um den Nullpunkt im Bereich der Meßgenauigkeit lagen und deshalb nicht als Zugspannungen identifiziert werden konnten.

**Vogelpohl** [5] beobachtet das Verhalten des Schmierfilms im Unterdruckgebiet an einem durchsichtigen Lager. Er beschreibt das Aufreißen des Schmierfilms: "Plötzlich entstanden bei einer bestimmten Exzentrizität die Blasen, und zwar kamen sie nicht von außen herein, sondern entstanden deutlich sichtbar mitten in der Ölschicht und zwar gerade dort, wo nach der Rechnung die Unterdruckspitze zu erwarten war, ... . Mit wachsender Exzentrizität vergrößert sich das Kavitationsfeld, die äußere Begrenzungslinie ist stabil, ... , die im Inneren sichtbaren Ölstreifen schwanken!" Dieser Vorgang unterscheidet sich aber von den Kavitationserscheinungen im Wasser: "Beim Öl bleibt nach erfolgter Hohlraumbildung fast das ganze Volumen auch nach Stillsetzung der Apparatur zurück; mit dem Auftreten hinreichend großer Unterdrücke ist nämlich eine intensive Gasausscheidung verbunden... Es gelang allerdings auch, durch plötzliches sehr kräftiges Anrücken für den Bruchteil einer Sekunde Kavitationsblasen zu erzeugen, die bis auf einen verschwindend geringen Gasrest vollständig wieder zusammenfielen." Weiterhin berichtet Vogelpohl von Untersuchungen zum Verhalten von mittelschwerem Turbinenöl bei Unterdruck in einer

Glasröhre. Dabei zeigten sich sowohl bei der Evakuierung der Glasröhren, in denen sich das Öl befand, als auch bei anschließenden Druckstößen durch Erschütterung irreversible Blasenbildungen, die auf Entgasung schließen lassen. Das geschah bei Drücken, die über dem Dampfdruck lagen, bei frischem Öl schon ab  $5 \text{ N/cm}^2$ .

**Cole** und **Hughes** [9] untersuchen die Ausbreitung des Schmierfilms in einem durchsichtigen Lager bei verschiedenen konstanten Drehzahlen, Belastungen und Ölzuführungsdrücken. Es zeigt sich, daß der Ölfilm hinter der minimalen Spaltdicke streifenweise aufreißt. Form und Ausbreitung des aufgerissenen Ölfilms ist variabel und reicht teilweise bis in den sich wieder verengenden Spalt. (Siehe dazu Abschnitt 11, Bild 30.1 und Bild 30.2)

Gegenstand der Untersuchungen von **Gnilke** [15] ist das wechselnd belastete Gleitgelenk. Aufbauend auf die Überlegungen von Kornfeld stellt er theoretische Untersuchungen an über das Aufreißen des Schmierfilms mit den Annahmen, daß 1) das Schmiermittel bei Zugbeanspruchungen verdampft, daß sich 2) Gasblasen im Schmierfilm befinden, die kleiner sind als die Spalthöhe und daß sich 3) Gasblasen im Öl befinden mit die Spalthöhe übersteigendem Durchmesser. Dabei kommt er zu der Schlußfolgerung, daß im Gleitlager Bedingungen herrschen, die keine wesentlichen Zugspannungen im Schmierfilm zulassen. Die hauptsächliche Ursache dafür sind Gasblasen in der Größenordnung der Spaltdicke, die im Druckberg stark zusammengepreßt sind und deshalb kaum sichtbar sind. Nach seinen Rechnungen zerreißt eine Gasblase von  $10 \mu\text{m}$  (entspricht etwa der minimalen Spalthöhe) bereits bei  $p = -1,3 \text{ N/cm}^2$ .

Weiterhin beobachtet Gnilke das Verhalten des Schmierfilms in einem durchsichtigen, wechselnd belasteten Gleitgelenk. Dabei zeigt sich, daß beim Abheben des Zapfens während des Lastrichtungswechsels der Schmierfilm in ein stark verästeltes Gebilde zerfällt, während das Öl vom Rand her nur langsam nachströmt. Nach erneutem Wechsel der Belastungsrichtung schließt sich dieses Gebiet, vom Rand beginnend, wieder zu einem vollständigen Ölfilm.

Für das Nachströmen des Öls in das Unterdruckgebiet macht Guilke die Kapillarwirkung verantwortlich. Dabei hat er außer acht gelassen, daß das Druckgefälle zwischen dem Umgebungsdruck bzw. Zufuhrdruck und dem Unterdruck im Blasengebiet größer ist, als der Drucksprung infolge der Oberflächenspannung, den er selbst mit nur  $1,3 \text{ N/cm}^2$  ab geschätzt hat.

Über das Verhalten der Schmierflüssigkeiten bei niedrigen Drücken im Gleitlager kann zusammengefaßt gesagt werden, daß es ausreichend bekannt und experimentell abgesichert ist: Der Schmierfilm kann keine bzw. keine nennenswerten Zugspannungen aufnehmen. Bei niedrigen Drücken reißt der Film streifenweise bzw. verästelt auf. Ursache dafür sind im Schmierfilm vorhandene Gasblasen, die sich ausdehnen, Gase, die in der Flüssigkeit gelöst sind und bei Unterdruck austreten, sowie Verdampfung. Welche Ursache vorherrschend ist, hängt von der Druckänderungsgeschwindigkeit und dem Zustand der Flüssigkeit ab. Der Einfluß der Oberflächenspannung beim Nachströmen der Schmierflüssigkeit ist im Vergleich zum Zufuhrdruck gering.

Diese Erkenntnisse sind bis jetzt noch nicht konsequent in die Berechnung der Gleitlager eingegangen. Selbst Autoren, die sich eingehend mit dem Verhalten des Schmiermittels im Unterdruckgebiet befaßt haben, griffen bei anschließenden Berechnungen auf die üblichen Randbedingungen zurück. Eine Ausnahme bildet **Floberg** [10], der ideale Kavitation annimmt und auf den einfachsten Fall, das unendlich breite, stationär belastete Lager anwendet, um die Gleitlagerreibung zu ermitteln.

### 3 Zwei Modelle der Schmiermittelströmung

Durch Einbeziehung des Unterdruckgebietes in die hydrodynamische Schmiertheorie entsprechend den Kenntnissen über das Verhalten der Schmiermittel bei niedrigem Druck, soll diese erweitert werden. Dazu ist es notwendig, daß die Annahme eines vollständig mit

Flüssigkeit gefüllten Schmierspalt fallengelassen wird. Aufgrund der verschiedenen Interpretationsmöglichkeiten der beobachteten Erscheinungen zur Entstehung der Blasen bieten sich zwei mögliche Modellvorstellungen.

Durch ihre wesentlichen Annahmen sollen diese beiden Modelle zunächst verbal dargestellt werden.

### **3.1 Modell1 (Flüssigkeits-Gas-Gemisch)**

**Annahme:** *Der Schmierspalt wird von einem Gemisch aus Flüssigkeit und Gas ausgefüllt. Die gasförmige und die flüssige Phase gehen nicht ineinander über.*

Durch die Annahme wird das Modell im wesentlichen charakterisiert. Dabei kommt das Aufreißen des Schmierfilms zustande, indem die Gasblasen, die im gesamten Schmierspalt verteilt sind, im Druckberg stark zusammengepreßt werden und sich bei Annäherung des Drucks an den Nullpunkt stark ausdehnen. Es wird die Beständigkeit der einmal entstandenen bzw. von Anfang an vorhandenen Blasen betont und Verdampfungserscheinungen vernachlässigt.

**Annahme:** *Die Gasblasen sind mengenmäßig gleichmäßig in dem Gemisch verteilt. Es tritt keine Entmischung auf.*

Diese Annahme wird zur Vereinfachung der mathematischen Darstellung gemacht, obwohl bei stationär belasteten Gleitlagern, wo die Lage des Unterdruckgebiets gleich bleibt, im Unterdruckgebiet eine Tendenz der Blasenansammlung beobachtet wurde (**Vogelpohl** [5]). Bei instationär belasteten Gleitlagern, wo Ort und Größe des Unterdruckgebiets ständig wechseln, wird diese Annahme besser zutreffen. Es gibt aber auch die Möglichkeit, Blasenansammlungen im Unterdruckgebiet trotz dieser Annahme zu berücksichtigen, was später gezeigt wird (Abschnitt 11).

**Annahme:** *Die Zustandsänderung des Gases ist isotherm.*

Welche konkrete Zustandsänderung hier genommen wird, ist unbedeutend, was anhand der Untersuchungen zum Einfluß der Mischungskonstanten  $C$  gezeigt wird (Abschnitt 10). Es kommt lediglich auf den qualitativen Zusammenhang zwischen Druck und Volumen an. Darum wurde das einfachste Druck-Volumen-Gesetz gewählt.

**Annahme:** *Die Viskosität  $\eta$  der reinen Flüssigkeit ist konstant. Das Flüssigkeits-Gas-Gemisch verhält sich ebenfalls wie eine Newtonsche Flüssigkeit mit der Viskosität  $\eta_g$ . Diese ergibt sich, indem angenommen wird, daß durch die Blasen im Gemisch die Schubfläche verringert wird und sich dem entsprechend proportional die Viskosität  $\eta_g$  des Gemischs gegenüber der Viskosität  $\eta$  der reinen Flüssigkeit verringert.*

Die Annahme einer mittleren konstanten Viskosität der Flüssigkeit ist bis auf einige spezielle Untersuchungen zum Temperatureinfluß auf die Tragfähigkeit in der Gleitlagerforschung üblich und soll hier beibehalten werden. Die Reduktion der Viskosität des Gemischs entsprechend dem Blasenvolumen ist physikalisch sinnvoll und wirkt sich günstig auf die mathematische Darstellung aus. Deshalb wird sie berücksichtigt, obwohl sie nicht wesentlich ist.

### **3.2 Modell 2 (Kavitation)**

**Annahme:** *In dem Gebiet, wo der Schmierfilmdruck  $p$  größer als der Dampfdruck (Dampfdruck = Nullpunkt) ist, füllt die Flüssigkeit den Schmierspalt vollständig aus. Erreicht der Druck  $p$  den Wert Null, so entstehen Dampfblasen, die dann gemeinsam mit der Flüssigkeit den Schmierspalt ausfüllen, und der Druck bleibt konstant Null. Der Vorgang ist reversibel und erfolgt ohne zeitliche Verzögerung.*

Diese Annahme beschreibt die ideale Kavitation, wie sie bereits auf die Strömung im Gleitlager für den einfachen Fall des stationär belasteten, unendlich breiten Gleitlagers von Floberg [10] angewendet wurde. Damit werden die Verdampfungserscheinungen betont und die beständige Existenz zweier Phasen vernachlässigt.

### 3.3 Zu beiden Modellen

Die Modelle stellen zwei Extreme dar, zwischen denen der reale Fall liegen wird. Dadurch werden die Ergebnisse der beiden Modelle den realen Fall eingrenzen und zeigen, in welcher Größenordnung der Fehler durch die verschärfte Annahme in Richtung des ersten oder zweiten Modells sein kann.

Durch die Existenz zweier Phasen nebeneinander entstehen Grenzflächen und damit die Frage nach dem Einfluß der Oberflächenspannungen. Die Größe eines Drucksprungs infolge der Oberflächenspannung wurde von Gnilke [15] mit ca. 1 N/cm<sup>2</sup> abgeschätzt und als gering vernachlässigt.

Weiterhin werden die üblichen Annahmen der hydrodynamischen Schmiertheorie verwendet. Dabei sollen die Gleichungen möglichst allgemein für das endlich breite, instationär belastete Gleitlager mit beliebiger Spaltgeometrie formuliert werden. Es werden aber auch stets die Gleichungen für das unendlich breite Lager mit angegeben, da diese hauptsächlich für qualitative Untersuchungen herangezogen werden.

## 4 Mathematische Darstellung des Strömungsmodells 1 (Flüssigkeits-Gas-Gemisch)

### 4.1 Füllungsgrad

Die Annahme eines unvollständig mit Flüssigkeit gefüllten Schmierpalts führt zu den Begriffen des örtlichen Füllungsgrades  $F$  und des Gesamtfüllungsgrades  $F_{ges}$ , die zunächst eingeführt werden.

Gegeben ist ein Schmierpaltelement mit dem Volumen  $v$ . Es enthält eine Flüssigkeitsmenge mit dem Volumen  $v_f$  und eine Gasmenge mit dem Volumen  $v_g$ .

$$(7) \quad v = v_f + v_g$$

Dann ist der örtliche Füllungsgrad  $F$  definiert durch

$$(8) \quad F =_{\text{def}} v_f/v$$

Da sich der Schmierfilm in endlich große Gebiete aufteilt, die entweder mit Flüssigkeit oder mit Gas gefüllt sind, würde der örtliche Füllungsgrad, der von differentiell kleinen Volumenelementen gebildet wird, keine brauchbare, kontinuierliche Funktion des Ortes und der Zeit ergeben. Dieser Mangel wird behoben, indem der örtliche Füllungsgrad  $F$  einen örtlichen Mittelwert darstellt, der aus der Flüssigkeitsverteilung der näheren Umgebung des betreffenden Punktes gebildet wird.

Der Füllungsgrad  $F_{ges}$  des gesamten Lagers ist definiert durch den Quotienten des Volumens der gesamten Flüssigkeitsmenge im Schmierspalt und des gesamten Schmierpaltelementvolumens, gegeben durch die Formel

$$(9) \quad F_{ges} =_{\text{def}} \frac{\int_a^a F \cdot h \cdot da}{\int_a^a h \cdot da}$$

, wobei  $a$  die Fläche des Schmierpalts ist.

## 4.2 Volumen-Druck-Gesetz und Mischungskonstante

Für die gasförmige Phase soll die isotherme Zustandsänderung gelten. Die beiden Phasen sollen nicht ineinander übergehen (Entsprechend den Annahmen Abschnitt 3.1). Daraus folgt für das geschlossene Schmierspaltenelement

$$(10) \quad p \cdot v_g = \text{konstant}$$

Die Schmierflüssigkeit ist inkompressibel

$$(11) \quad v_f = \text{konstant}$$

Es wird die Zahl  $c$  definiert, die für das geschlossene Schmierspaltenelement aus (10) und (11) folgend, ebenfalls eine Konstante ist.

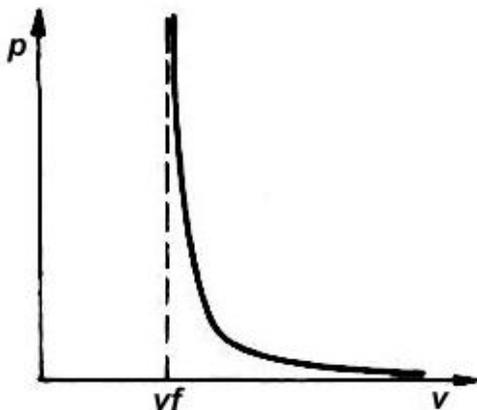
$$(12) \quad c =_{\text{def}} \frac{p \cdot v_g}{v_f}$$

Durch die Annahme, daß die Gasblasen mengenmäßig (nicht volumenmäßig) gleichmäßig verteilt sein sollen (entsprechend der Annahme Abschnitt 3.1), wird die Zahl  $c$  eine Konstante für das gesamte Lager und wird im folgenden Mischungskonstante  $c$  genannt.

Die Gleichungen (7) und (12) ergeben dann das Druck-Volumen-Gesetz des Flüssigkeits-Gas-Gemischs

$$(13) \quad v = v_f \cdot \frac{p + c}{p}$$

,welches in Bild 2 qualitativ dargestellt ist.



**Bild 2: Druck-Volumen-Diagramm des Flüssigkeits-Gas-Gemischs**

Von der Größe der Mischungskonstanten  $c$  hängt ab, wie stark sich die Kurve an ihre beiden Asymptoten anschmiegt.

Die Gleichungen (8) und (13) ergeben den Zusammenhang zwischen dem Schmierfilmdruck  $p$  und dem örtlichen Füllungs-grad  $F$

$$(14) \quad F = \frac{v_f}{v} = \frac{p}{p + c}$$

## 4.3 Viskosität des Gemischs

Die Schmierflüssigkeit hat die konstante Viskosität  $\eta$ . Das Flüssigkeits-Gas-Gemisch wird ebenfalls als Newtonsche Flüssigkeit mit der Viskosität  $\eta_g$  angenommen. Die Viskosität  $\eta_g$  ergibt sich, indem die Viskosität der reinen Flüssigkeit proportional zum vorhandenen Blasenvolumen reduziert wird (Entsprechend der Annahme Abschnitt 3.1). Daraus folgt

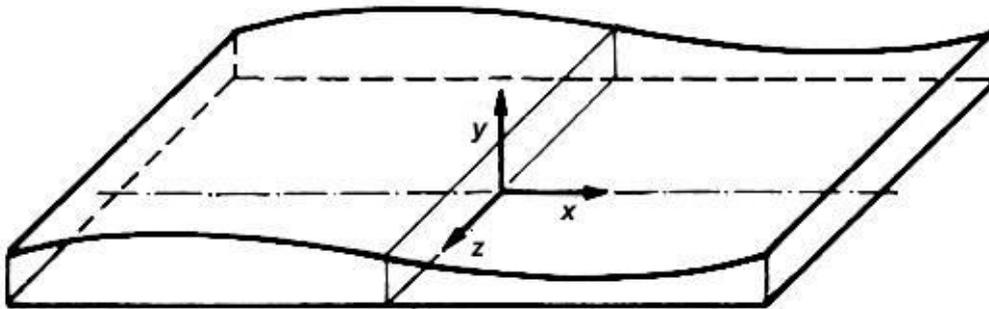
$$(15) \quad \eta_g = \eta \cdot F$$

Da der Füllungsgrad  $F$  eine Funktion des Druckes ist (14), ist die Viskosität  $\eta_g$  des Gemischs ebenfalls eine Funktion des Druckes

$$(16) \quad \eta_g = \eta \cdot \frac{p}{p + c}$$

#### 4.4 Kräfte am Schmiermittelelement

Es wird das lagerschalenfeste Koordinatensystem  $x$ - $y$ - $z$  eingeführt (Bild 3). Zu den Koordinaten  $x$ ,  $y$  und  $z$  gehören die Geschwindigkeitskomponenten  $u$ ,  $v$  und  $w$ .



**Bild 3: Abgewickelter Schmierpalt**

Für die Kräfte am Schmiermittelelement gelten die gleichen Annahmen wie bei der bisherigen Schmiertheorie. Die Trägheitskräfte werden vernachlässigt. Da die Spalthöhe gegenüber der flächenmäßigen Ausdehnung des Spalts gering ist und die Neigung der Oberflächen der Lagerteile zueinander ebenfalls gering ist, können wir annehmen, daß der Druck über die Spalthöhe konstant ist,

die Strömungsgeschwindigkeit  $v$  in  $y$ -Richtung Null ist und

für die Geschwindigkeitsänderungen die Relationen gelten:

$$\frac{\partial u}{\partial y} \gg \frac{\partial u}{\partial z} \quad \text{und} \quad \frac{\partial w}{\partial y} \gg \frac{\partial w}{\partial x}$$

Deshalb werden Schubspannungen infolge der Geschwindigkeitsänderungen  $\partial u/\partial z$  und  $\partial w/\partial x$  vernachlässigt.

Außerdem werden Kräfte infolge von Oberflächenspannungen vernachlässigt (entsprechend der Annahme Abschnitt 3.1). Damit sind die Spannungen entsprechend Bild 4 entscheidend für die Bewegung des Schmiermittelelements.

Das Kräftegleichgewicht am Element in  $x$ - bzw.  $z$ -Richtung ergibt dann

$$(17) \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$(18) \quad \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial z}$$

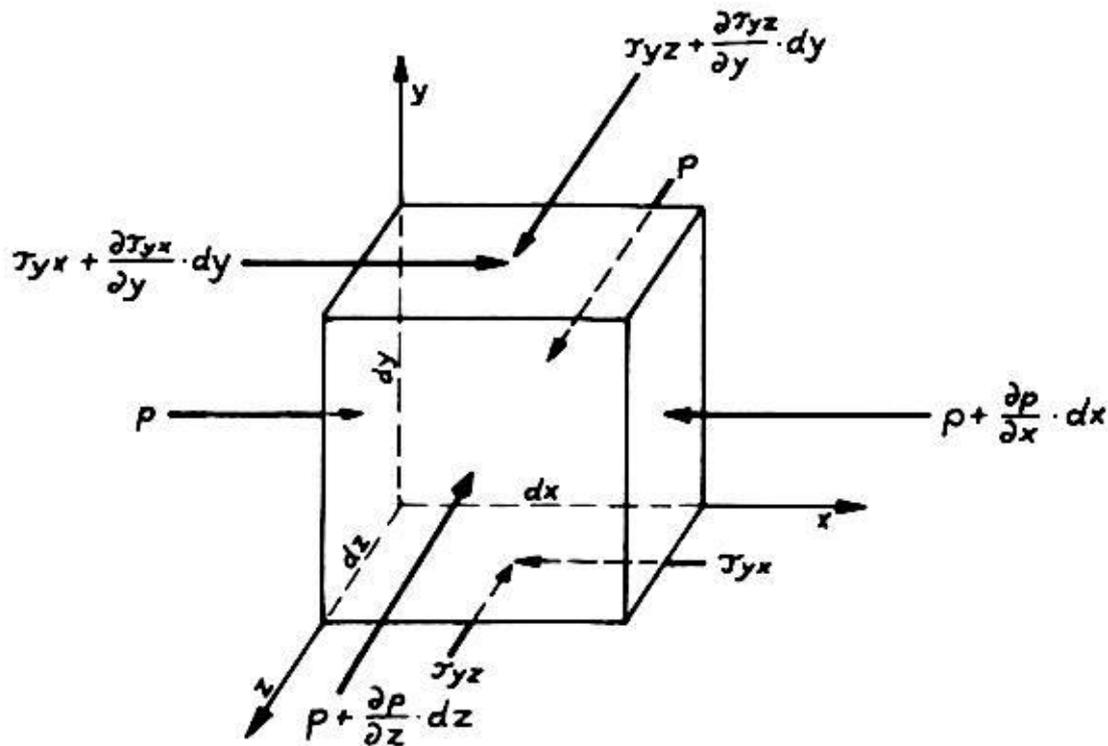


Bild 4: Spannungen am Schmiermittelelement

#### 4.5 Strömungsgeschwindigkeiten

In die Gleichungen (17) und (18) wird das Newtonsche Reibungsgesetz

$$(19) \quad \tau_{yx} = \eta g \cdot \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$(20) \quad \tau_{yz} = \eta g \cdot \frac{\partial w}{\partial y}$$

eingeführt, und es ergibt sich

$$(21) \quad \eta g \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$(22) \quad \eta g \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial p}{\partial z}$$

Die Gleichungen (21) und (22) werden zweifach über  $y$  integriert, wobei die Haftbedingungen (23) als Randbedingungen verwendet werden.

$$(23) \quad \begin{aligned} u(y=0) &= 0 \\ u(y=h) &= uw \\ w(y=0) &= 0 \\ w(y=h) &= 0 \end{aligned}$$

$uw$  ist die Gleitgeschwindigkeit zwischen Welle und Lagerschale in  $x$ -Richtung. In  $z$ -Richtung wird zur Vereinfachung der Formeln keine Gleitgeschwindigkeit angenommen. Das bedeutet keine Einschränkung, da man das Koordinatensystem entsprechend der

Gleitbewegung legen kann. Damit ergeben sich die Geschwindigkeitsprofile  $u(y)$  und  $w(y)$  über die Spalthöhe

$$(24) \quad u(y) = \frac{y^2}{2 \cdot \eta g} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{h \cdot y}{2 \cdot \eta g} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{uw \cdot y}{h}$$

$$(25) \quad w(y) = \frac{y^2}{2 \cdot \eta g} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{h \cdot y}{2 \cdot \eta g} \cdot \frac{\partial p}{\partial z}$$

Das bestimmte Integral

$$(26) \quad u_m = \frac{1}{h} \cdot \int_0^h u(y) \cdot dy$$

über die Höhe  $h$  liefert die mittlere Strömungsgeschwindigkeit  $u_m$

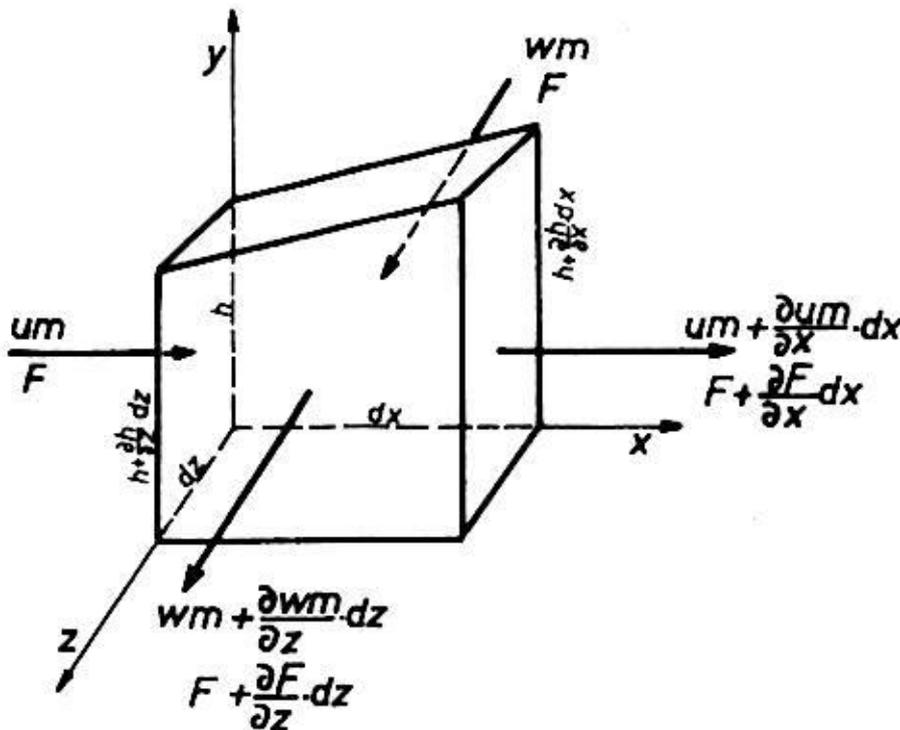
$$(27) \quad u_m = -\frac{h^2}{12 \cdot \eta g} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{uw}{2}$$

Analog erhält man die mittlere Strömungsgeschwindigkeit  $w_m$

$$(28) \quad w_m = -\frac{h^2}{12 \cdot \eta g} \cdot \frac{\partial p}{\partial z}$$

#### 4.6 Kontinuitätsbedingung

Die Kontinuitätsbedingung wird erfüllt, indem die Volumenbilanz für die inkompressible Phase des Gemischs, nämlich für die Flüssigkeit, aufgestellt wird. Dabei muß im Unterschied zur bisherigen Theorie der Füllungsgrad  $F$  berücksichtigt werden.



**Bild 5: Zu- und Abströmungsbedingungen am koordinatenfesten Volumenelement**

Das zuströmende Flüssigkeitsvolumen (enthält das abströmende mit umgekehrtem Vorzeichen) in der Zeit  $dt$  wird dargestellt durch den Ausdruck (dazu Bild 5)

$$um \cdot F \cdot h \cdot dt \cdot dz -$$

$$- \left( um + \frac{\partial um}{\partial x} \cdot dx \right) \cdot \left( F + \frac{\partial F}{\partial x} \cdot dx \right) \cdot \left( h + \frac{\partial h}{\partial x} \cdot dx \right) \cdot dt \cdot dz +$$

$$+ wm \cdot F \cdot h \cdot dt \cdot dx -$$

$$- \left( wm + \frac{\partial wm}{\partial z} \cdot dz \right) \cdot \left( F + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot dz \right) \cdot \left( h + \frac{\partial h}{\partial z} \cdot dz \right) \cdot dt \cdot dx$$

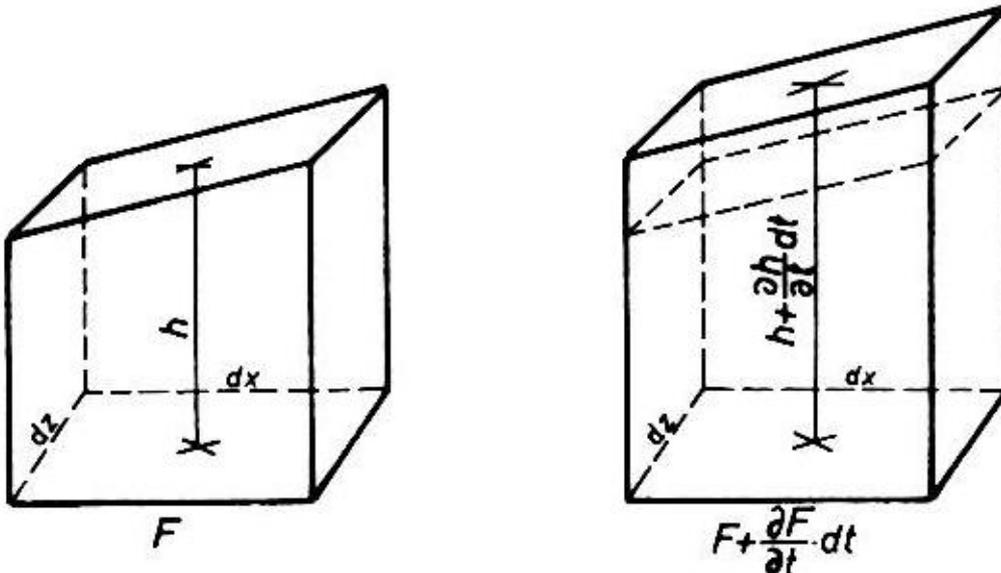
Ausmultipliziert und ohne die Glieder höherer Ordnung lautet der Ausdruck

$$- \left( \frac{\partial um}{\partial x} \cdot F \cdot h + um \cdot \frac{\partial F}{\partial x} \cdot h + um \cdot F \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \right) \cdot dt \cdot dx \cdot dz -$$

$$- \left( \frac{\partial wm}{\partial z} \cdot F \cdot h + wm \cdot \frac{\partial F}{\partial z} \cdot h + wm \cdot F \cdot \frac{\partial h}{\partial z} \right) \cdot dt \cdot dx \cdot dz$$

oder

$$- \frac{\partial}{\partial x} (um \cdot F \cdot h) \cdot dt \cdot dx \cdot dz - \frac{\partial}{\partial z} (wm \cdot F \cdot h) \cdot dt \cdot dx \cdot dz$$



**Bild 6: Zunahme im koordinatenfesten Volumenelement**

Die Zunahme des Flüssigkeitsvolumens im koordinatenfesten Volumenelement in der Zeit  $dt$  wird dargestellt durch den Ausdruck (dazu Bild 6)

$$\left( F + \frac{\partial F}{\partial t} \cdot dt \right) \cdot \left( h + \frac{\partial h}{\partial t} \cdot dt \right) \cdot dx \cdot dz - F \cdot h \cdot dx \cdot dz$$

Ausmultipliziert und ohne die Glieder höherer Ordnung lautet der Ausdruck

$$\left( \frac{\partial F}{\partial t} \cdot h + F \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \right) \cdot dt \cdot dx \cdot dz$$

oder

$$\frac{\partial}{\partial t} (F \cdot h) \cdot dt \cdot dx \cdot dz$$

Die Bilanz: **Zustrom = Zunahme** ergibt mit dt, dx, dz gekürzt und umgestellt

$$(29) \quad 0 = \frac{\partial um}{\partial x} \cdot F \cdot h + um \cdot \frac{\partial F}{\partial x} \cdot h + um \cdot F \cdot \frac{\partial h}{\partial x} + \\ + \frac{\partial wm}{\partial z} \cdot F \cdot h + wm \cdot \frac{\partial F}{\partial z} \cdot h + wm \cdot F \cdot \frac{\partial h}{\partial z} + \\ + \frac{\partial F}{\partial t} \cdot h + F \cdot \frac{\partial h}{\partial t}$$

oder

$$(30) \quad 0 = \frac{\partial}{\partial x} (um \cdot F \cdot h) + \frac{\partial}{\partial z} (wm \cdot F \cdot h) + \frac{\partial}{\partial t} (F \cdot h)$$

#### 4.7 Differentialgleichung für den Druckverlauf

In die Gleichungen (27) und (28) für die mittleren Strömungsgeschwindigkeiten wird die Gleichung (15) für die Viskosität  $\eta_g$  des Gemischs eingesetzt

$$(31) \quad um = -\frac{h^2}{12 \cdot \eta \cdot F} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{uw}{2}$$

$$(32) \quad wm = -\frac{h^2}{12 \cdot \eta \cdot F} \cdot \frac{\partial p}{\partial z}$$

, wodurch die variable Viskosität  $\eta_g$  eliminiert wird.

Die Gleichungen (31) und (32) für die mittleren Strömungsgeschwindigkeiten  $um$ ,  $wm$  und die Gleichung (14) für den Füllungsgrad  $F$  werden in die Kontinuitätsgleichung (30) eingesetzt.

$$(33) \quad 0 = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{h^3}{12 \cdot \eta} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{uw}{2} \cdot \frac{p \cdot h}{p+c} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( -\frac{h^3}{12 \cdot \eta} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{p \cdot h}{p+c} \right)$$

Anschließend werden die Differentiationen ausgeführt und die Gleichung mit  $12 \cdot \eta / h^3$  multipliziert. So erhält man die Differentialgleichung für den Druckverlauf im Schmierespalt, welcher mit einem Flüssigkeits-Gas-Gemisch gefüllt ist.

$$(34) \quad 0 = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \frac{3}{h} \cdot \left( \frac{\partial h}{\partial x} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial z} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \right) - \\ - \frac{12 \cdot \eta}{h^3} \cdot \frac{p}{p+c} \cdot \left( \frac{uw}{2} \cdot \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} \right) - \\ - \frac{12 \cdot \eta}{h^2} \cdot \frac{c}{(p+c)^2} \cdot \left( \frac{uw}{2} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial t} \right)$$

Diese Gleichung ist noch so allgemein gehalten, daß sie für beliebige instationär belastete Gleitpaarungen mit hydrodynamischer Schmierung z.B. den einfachen Gleitschuh, das Radiallager, das Axiallager oder eine axiale Führung angewendet werden kann.

Ein Vergleich mit der Reynolds'schen Gleichung (1) zeigt, daß durch die Annahme von Gasblasen im Schmiermittel lediglich die Glieder

$$\frac{p}{p+c} \quad \text{und} \quad -\frac{12 \cdot \eta}{h^2} \cdot \frac{c}{(p+c)^2} \cdot \left( \frac{uw}{2} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial t} \right)$$

als Faktor bzw. als Summand hinzugekommen sind. Ansonsten ist die Gleichung erhalten geblieben.

Sie wird nun in üblicher Weise auf das Radialgleitlager zugeschnitten und dimensionslos gemacht. Abweichend vom üblichen wird aber als Bezugswinkelgeschwindigkeit eine unabhängige, zeitlich konstante Winkelgeschwindigkeit  $\omega_b$  eingeführt, so daß variable Gleitgeschwindigkeiten z.B. beim pendelnden Gleitgelenk problemlos berücksichtigt werden können. Damit ergibt sich eine dimensionslose Gleitgeschwindigkeit  $\Omega$  und eine dimensionslose Zeit  $T$ . Die Mischungskonstante  $c$  wird wie der Druck  $p$  dimensionslos gemacht. Als Bezugsviskosität wird die konstante Viskosität  $\eta$  der blasenfreien Flüssigkeit verwendet.

Es werden folgende dimensionslose Größen eingeführt

$$(35) \quad X = \frac{x}{r} \qquad (36) \quad Z = \frac{2 \cdot z}{b}$$

$$(37) \quad S = \frac{s}{2 \cdot r} \qquad (38) \quad B = \frac{b}{2 \cdot r}$$

$$(39) \quad H = \frac{2 \cdot h}{s} \qquad (40) \quad T = \frac{\omega_b \cdot t}{2 \cdot \pi}$$

$$(41) \quad \Omega = \frac{2 \cdot \pi \cdot \omega}{\omega_b} = \frac{2 \cdot \pi \cdot uw}{\omega_b \cdot r}$$

$$(42) \quad P = \frac{S^2 \cdot p}{\eta \cdot \omega_b} \qquad (43) \quad C = \frac{S^2 \cdot c}{\eta \cdot \omega_b}$$

Damit ergibt sich die dimensionslose Differentialgleichung für den Druckverlauf im endlich breiten, instationär belasteten Radialgleitlager mit einem Flüssigkeits-Gas-Gemisch

$$(44) \quad 0 = \frac{\partial^2 P}{\partial X^2} + \frac{1}{B^2} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial Z^2} + \frac{3}{H} \cdot \left( \frac{\partial H}{\partial X} \cdot \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{1}{B^2} \cdot \frac{\partial H}{\partial Z} \cdot \frac{\partial P}{\partial Z} \right) -$$

$$-\frac{6}{\pi \cdot H^3} \cdot \frac{P}{P+C} \cdot \left( \frac{\Omega}{2} \cdot \frac{\partial H}{\partial X} + \frac{\partial H}{\partial T} \right) -$$

$$-\frac{6}{\pi \cdot H^2} \cdot \frac{C}{(P+C)^2} \cdot \left( \frac{\Omega}{2} \cdot \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\partial P}{\partial T} \right)$$

Diese Gleichung gilt für die gesamte Fläche des Schmierpalts. Als Randbedingungen werden nur die Umgebungs- bzw. Ölzuführungsdrücke angegeben.

Für das unendlich breite Lager vereinfacht sich die Gleichung (44) zu

$$(45) \quad 0 = \frac{\partial^2 P}{\partial X^2} + \frac{3}{H} \cdot \frac{\partial H}{\partial X} \cdot \frac{\partial P}{\partial X} -$$

$$- \frac{6}{\pi \cdot H^3} \cdot \frac{P}{P+C} \cdot \left( \frac{\Omega}{2} \cdot \frac{\partial H}{\partial X} + \frac{\partial H}{\partial T} \right) -$$

$$- \frac{6}{\pi \cdot H^2} \cdot \frac{C}{(P+C)^2} \cdot \left( \frac{\Omega}{2} \cdot \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\partial P}{\partial T} \right)$$

Der Füllungsgrad  $F$  in Abhängigkeit vom dimensionslosen Druck  $P$  ergibt sich aus Gleichung (14)

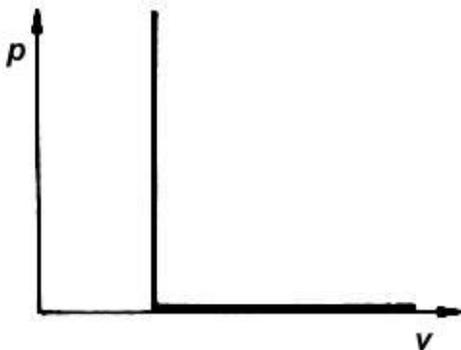
$$(46) \quad F = \frac{P}{P+C}$$

## 5 Mathematische Darstellung des Strömungsmodells 2 (Kavitation)

Das Strömungsmodell mit der Annahme idealer Kavitation im Schmierespalt ist bereits bekannt. Für die Anwendung auf das instationär belastete, endlich breite Lager muß die mathematische Darstellung jedoch noch weiterentwickelt werden. Das gilt speziell für die Bedingungen im Unterdruckgebiet und für die Übergangsbedingungen vom Druckberg zum Unterdruckgebiet und umgekehrt.

### 5.1 Volumen-Druck-Gesetz, Füllungsgrad

Das Volumen-Druck-Gesetz bei Annahme idealer Kavitation besteht aus zwei qualitativ verschiedenen Bereichen. Im Bereich  $p > 0$  besteht das Schmiermittel nur aus inkompressibler Flüssigkeit. Im Bereich  $p = 0$  (Dampfdruck) füllt das Schmiermittel, bestehend aus Flüssigkeit und Dampfblasen, den gesamten zur Verfügung stehenden Raum aus (Bild 7).



**Bild 7: Druck-Volumen-Diagramm des Schmiermittels mit idealer Kavitation**

Deshalb müssen für die beiden Gebiete verschiedene Strömungsgleichungen aufgestellt werden, die außerdem mit Hilfe von Übergangsbedingungen gekoppelt werden müssen.

Die Begriffe des Füllungsgrades werden analog Modell 1 eingeführt. Für das Gebiet  $p > 0$  ist der örtliche Füllungsgrad  $F=1$ .

### 5.2 Das Gebiet $p > 0$ (Druckberg)

Im Gebiet, wo der Druck  $p$  größer Null ist, ist der Schmierespalt vollständig mit Schmierflüssigkeit gefüllt. Deshalb gilt in diesem Gebiet die Reynolds'sche Differentialgleichung für

den Druckverlauf, wie sie aus der Literatur mehrfach bekannt ist. Deshalb wird hier auf ihre Herleitung verzichtet.

Reynolds'sche Differentialgleichung:

$$(1) \quad 0 = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \frac{3}{h} \cdot \left( \frac{\partial h}{\partial x} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial z} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \right) - \frac{12 \cdot \eta}{h^3} \cdot \left( \frac{uw}{2} \cdot \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} \right)$$

Diese Gleichung wird analog (44) dimensionslos gemacht.

$$(47) \quad 0 = \frac{\partial^2 P}{\partial X^2} + \frac{1}{B^2} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial Z^2} + \frac{3}{H} \cdot \left( \frac{\partial H}{\partial X} \cdot \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{1}{B^2} \cdot \frac{\partial H}{\partial Z} \cdot \frac{\partial P}{\partial Z} \right) - \frac{6}{\pi \cdot H^3} \cdot \left( \frac{\Omega}{2} \cdot \frac{\partial H}{\partial X} + \frac{\partial H}{\partial T} \right)$$

Für das unendlich breite Lager vereinfacht sich die Gleichung

$$(48) \quad 0 = \frac{\partial^2 P}{\partial X^2} + \frac{3}{H} \cdot \frac{\partial H}{\partial X} \cdot \frac{\partial P}{\partial X} - \frac{6}{\pi \cdot H^3} \cdot \left( \frac{\Omega}{2} \cdot \frac{\partial H}{\partial X} + \frac{\partial H}{\partial T} \right)$$

### 5.3 Das Gebiet $p=0$ (Unterdruckgebiet)

Im Gebiet  $p=0$  resultieren Strömungsgeschwindigkeiten nur aus der Mitnahmewirkung von Welle und Lagerschale. Es herrscht reine Scherströmung, die auch bei kleinen Füllungsgraden gewährleistet ist, da aufgrund der geringen Spalthöhe die Flüssigkeitsbereiche sich stets über die gesamte Spalthöhe erstrecken und an beiden Oberflächen haften, was durch Beobachtungen bestätigt ist.

Bei Verwendung der Haftbedingungen

$$(23) \quad \begin{aligned} u(y=0) &= 0 \\ u(y=h) &= uw \\ w(y=0) &= 0 \\ w(y=h) &= 0 \end{aligned}$$

ergeben sich sofort die Geschwindigkeitsprofile über die Spalthöhe

$$(49) \quad u(y) = uw \cdot y/h$$

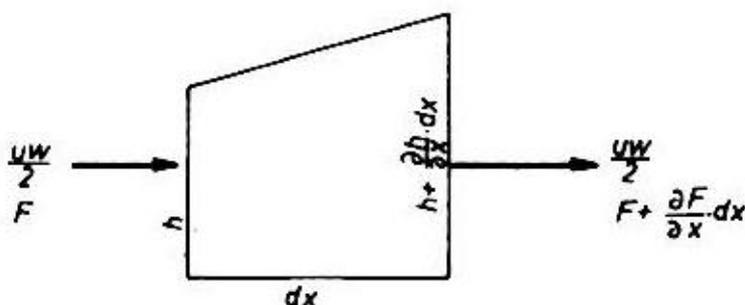
$$(50) \quad w(y) = 0$$

und die mittleren Strömungsgeschwindigkeiten

$$(51) \quad u_m = uw/2$$

$$(52) \quad w_m = 0$$

Damit läßt sich in einfacher Form die Kontinuitätsbedingung aufstellen.



**Bild 8: Zu- und Abströmungsbedingungen am koordinatenfesten Volumenelement im Gebiet  $p=0$**

Das zu- bzw. abströmende Flüssigkeitsvolumen in der Zeit  $dt$  wird dargestellt durch den Ausdruck (dazu Bild 8)

$$\frac{uw}{2} \cdot F \cdot h \cdot dt \cdot dz - \frac{uw}{2} \cdot \left( F + \frac{\partial F}{\partial x} \cdot dx \right) \cdot \left( h + \frac{\partial h}{\partial x} \cdot dx \right) \cdot dt \cdot dz$$

Ausmultipliziert und ohne das Glied höherer Ordnung lautet der Ausdruck

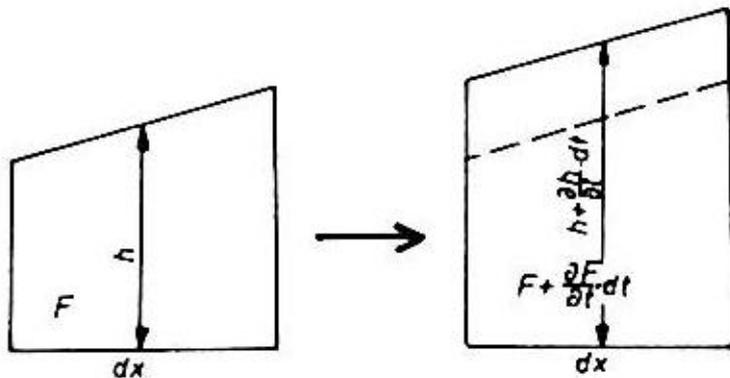
$$- \frac{uw}{2} \cdot \left( \frac{\partial F}{\partial x} \cdot h + F \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \right) \cdot dt \cdot dx \cdot dz$$

oder

$$- \frac{uw}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (F \cdot h) \cdot dt \cdot dx \cdot dz$$

Die Zunahme des Flüssigkeitsvolumens im koordinatenfesten Volumenelement in der Zeit  $dt$  wird dargestellt durch den Ausdruck (dazu Bild 9)

$$\left( F + \frac{\partial F}{\partial t} \cdot dt \right) \cdot \left( h + \frac{\partial h}{\partial t} \cdot dt \right) \cdot dx \cdot dz - F \cdot h \cdot dt \cdot dx \cdot dz$$



**Bild 9: Zunahme im koordinatenfesten Volumenelement im Gebiet  $p=0$**

9

Ausmultipliziert und ohne das Glied höherer Ordnung lautet der Ausdruck

$$\left( \frac{\partial F}{\partial t} \cdot h + F \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \right) \cdot dt \cdot dx \cdot dz$$

oder

$$\frac{\partial}{\partial t} (F \cdot h) \cdot dt \cdot dx \cdot dz$$

Die Bilanz: **Zustrom = Zunahme** ergibt mit  $dt$ ,  $dx$ ,  $dz$  gekürzt und umgestellt

$$(53) \quad 0 = \frac{uw}{2} \cdot \left( \frac{\partial F}{\partial x} \cdot h + F \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial F}{\partial t} \cdot h + F \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \right)$$

oder

$$(54) \quad 0 = \frac{uw}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (F \cdot h) + \frac{\partial}{\partial t} (F \cdot h)$$

Für  $x$ ,  $h$ ,  $t$ ,  $uw$  werden die dimensionslosen Größen  $X$ ,  $H$ ,  $T$ ,  $\Omega$  gemäß Gleichungen (35, 39, 40, 41) eingeführt.

$$(55) \quad 0 = \frac{\Omega}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial X} (F \cdot H) + \frac{\partial}{\partial T} (F \cdot H)$$

oder

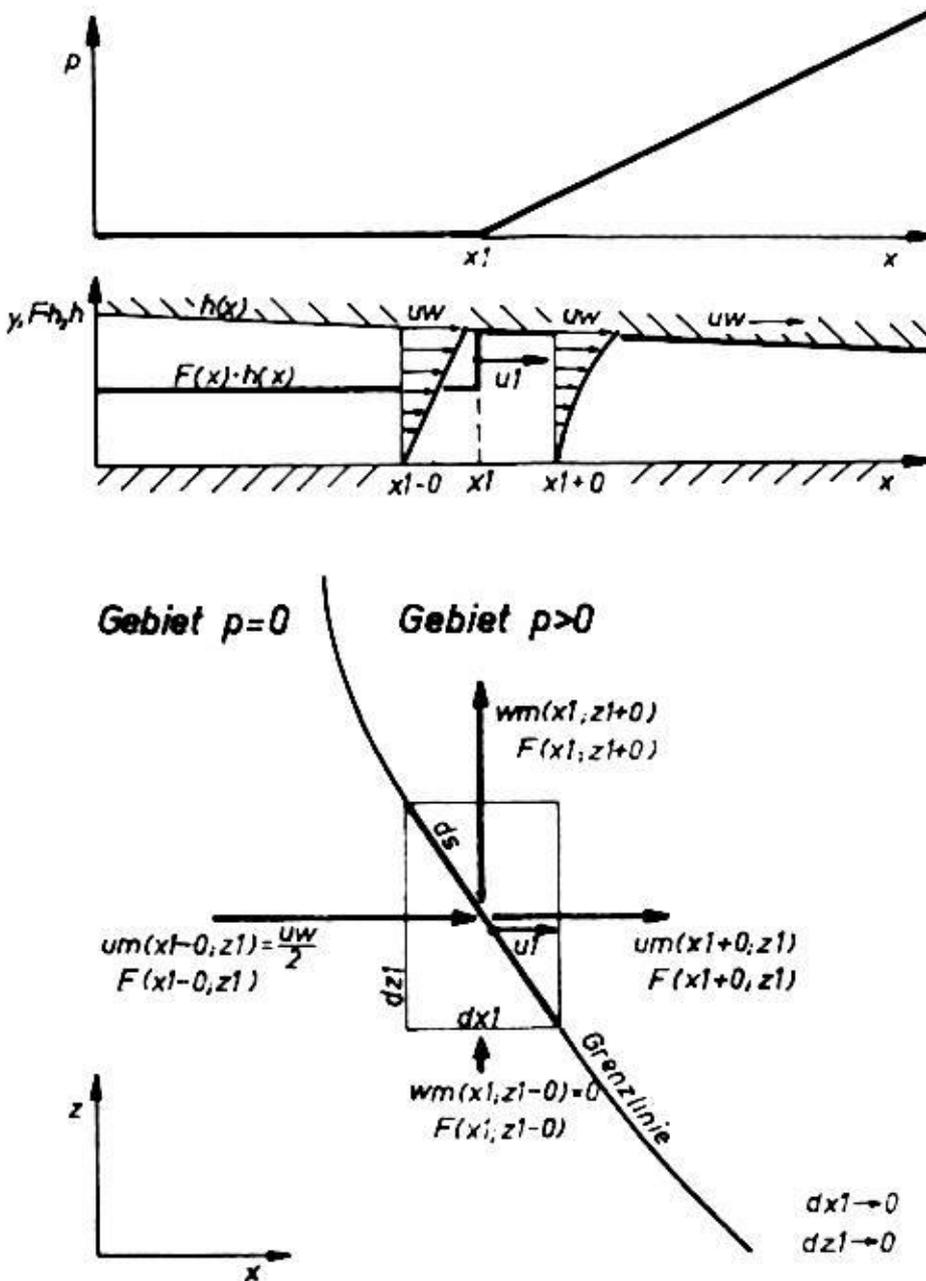
$$(56) \quad 0 = F \cdot \left( \frac{\Omega}{2} \cdot \frac{\partial H}{\partial X} + \frac{\partial H}{\partial T} \right) + H \cdot \left( \frac{\Omega}{2} \cdot \frac{\partial F}{\partial X} + \frac{\partial F}{\partial T} \right)$$

Damit ist die Strömung im Unterdruckgebiet  $p=0$  beschrieben.

### 5.4 Übergangsbedingungen

Die Kenntnis der Lage der Gebietsgrenzen (Druckberg-Unterdruckgebiet) ist notwendig für die Berechnung des Druckverlaufs. Diese Grenzen verschieben sich beim instationär belasteten Lager laufend je nach Schmierflüssigkeitsverteilung, Lagerbelastung und Spaltgeometrie.

Um die Verschiebungsgeschwindigkeiten zu ermitteln, wird an der Grenzlinie wieder die Mengenbilanz aufgestellt (Bild 10).



**Bild 10: Strömungsverhältnisse an der Grenzlinie zwischen Unterdruckgebiet und Druckberg**

An der Stelle  $(x_1, z_1)$  befindet sich die Grenzlinie. Sie bewegt sich mit der Geschwindigkeit  $u_1$  in x-Richtung. Über das Streckenelement  $ds$  der Grenzlinie strömt in der Zeit  $dt$  aus dem Unterdruckgebiet  $p=0$  das Flüssigkeitsvolumen

$$(u_m(x_1-0; z_1) - u_1) \cdot F(x_1-0; z_1) \cdot h \cdot dz_1 \cdot dt + \\ + w_m(x_1; z_1-0) \cdot F(x_1; z_1-0) \cdot h \cdot dx_1 \cdot dt$$

wobei

$$(57) \quad u_m(x_1-0; z_1) = uw/2$$

$$(58) \quad w_m(x_1; z_1-0) = 0$$

Über das Streckenelement  $ds$  strömt in der Zeit  $dt$  in den Druckberg  $p>0$  das Flüssigkeitsvolumen

$$[u_m(x_1+0; z_1) - u_1] \cdot F(x_1+0; z_1) \cdot h \cdot dz_1 \cdot dt + \\ + w_m(x_1; z_1+0) \cdot F(x_1; z_1+0) \cdot h \cdot dx_1 \cdot dt$$

wobei

$$(27) \quad u_m(x_1+0; z_1) = -\frac{h^2}{12 \cdot \eta g} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{uw}{2}$$

$$(59) \quad F(x_1+0; z_1) = 1$$

$$(28) \quad w_m(x_1; z_1+0) = -\frac{h^2}{12 \cdot \eta g} \cdot \frac{\partial p}{\partial z}$$

$$(60) \quad F(x_1; z_1+0) = 1$$

Die überströmenden Mengen sind identisch, womit sich die Gleichung ergibt

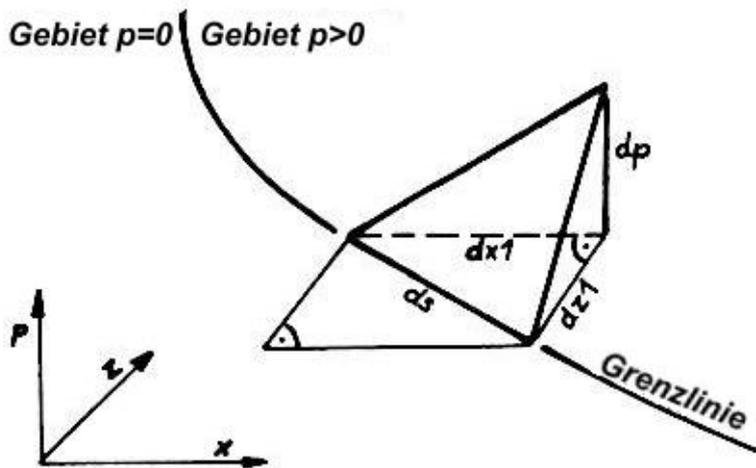
$$(61) \quad 0 = \frac{h^2}{12 \cdot \eta} \cdot \left( \frac{\partial p}{\partial x} \cdot dz_1 + \frac{\partial p}{\partial z} \cdot dx_1 \right) + (1 - F_1) \cdot \left( u_1 - \frac{uw}{2} \right) \cdot dz_1$$

In verkürzender Schreibweise ist hier

$$(62) \quad F_1 = F(x_1-0; z_1)$$

der örtliche Füllungsgrad dicht an der Grenzlinie im Bereich der Unterdruckgebietes.

Das Flächenelement  $dx_1 \cdot dz_1$  auf der Grenzlinie war gerade so gewählt, daß das Grenzlinienelement  $ds$  eine Diagonale bildet (Bild 10, 11).



**Bild 11: Druckanstieg am Rand des Druckberges**

Daraus ergibt sich folgende Beziehung zwischen  $dx_1$ ,  $dz_1$  und  $M_p/M_x$ ,  $M_p/M_z$

$$(63) \quad \frac{dx_1}{dz_1} = \frac{\partial p / \partial z}{\partial p / \partial x}$$

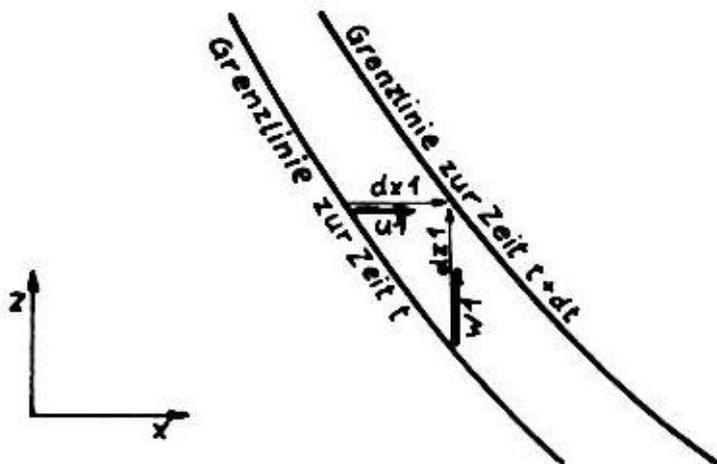
Eliminiert man mit Gleichung (63)  $dx_1$  aus (61) und dividiert diese anschließend durch  $dz_1$ , so ergibt sich

$$(64) \quad 0 = \frac{h^2}{12 \cdot \eta} \cdot \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{(\partial p / \partial z)^2}{\partial p / \partial x} \right) + (1 - F_1) \cdot \left( u_1 - \frac{uw}{2} \right)$$

Die Gleichung lässt sich nach der Verschiebungsgeschwindigkeit  $u_1$  umstellen

$$(65) \quad u_1 = \frac{uw}{2} - \frac{h^2}{12 \cdot \eta} \cdot \frac{1}{1 - F_1} \cdot \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{(\partial p / \partial z)^2}{\partial p / \partial x} \right)$$

Da die Grenzlinie keine bestimmten Punkte hat, kann man ihre Verschiebung auch als eine Bewegung in  $z$ -Richtung auffassen und durch die Geschwindigkeit  $w_1$  ausdrücken.



**Bild 12: Verschiebung der Grenzlinie**

In der Zeit  $dt$  verschiebt sich die Grenzlinie an der Stelle  $(x_1, z_1)$  um die Strecke  $dx_1$  bzw.  $dz_1$  (Bild 12). Es gilt

$$(66) \quad u_1 \cdot dx_1 = w_1 \cdot dz_1$$

oder

$$(67) \quad w_1 = \frac{dx_1}{dz_1} \cdot u_1$$

Zwischen den Streckenelementen  $dx_1$ ,  $dz_1$  und den Druckanstiegen  $M_p/M_x$  und  $M_p/M_z$  gilt die Beziehung (63) entsprechend Bild 11. Daraus folgt

$$(68) \quad w_1 = \frac{\partial p / \partial z}{\partial p / \partial x} \cdot u_1$$

Gleichung (65) eingesetzt, ergibt die Verschiebungsgeschwindigkeit  $w_1$

$$(69) \quad w_1 = \frac{uw}{2} \cdot \frac{\partial p / \partial x}{\partial p / \partial z} - \frac{h^2}{12 \cdot \eta} \cdot \frac{1}{1-F_1} \cdot \left( \frac{(\partial p / \partial x)^2}{\partial p / \partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} \right)$$

Es werden die dimensionslosen Verschiebungsgeschwindigkeiten  $U_1$  und  $W_1$  eingeführt.

$$(70) \quad U_1 = \frac{\partial X_1}{\partial T} = \frac{2 \cdot \pi}{r \cdot \omega b} \cdot u_1$$

$$(71) \quad W_1 = \frac{\partial Z_1}{\partial T} = \frac{1}{B} \cdot \frac{2 \cdot \pi}{r \cdot \omega b} \cdot w_1$$

Unter Verwendung der anderen bereits eingeführten dimensionslosen Größen (35 bis 42) ergeben sich die dimensionslosen Verschiebungsgeschwindigkeiten

$$(72) \quad U_1 = \frac{\Omega}{2} \cdot \frac{\pi \cdot H^2}{6} \cdot \frac{1}{1-F_1} \cdot \left( \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{1}{B^2} \cdot \frac{(\partial P / \partial Z)^2}{\partial P / \partial X} \right)$$

$$(73) \quad W_1 = \frac{\Omega \cdot B}{2} \cdot \frac{\partial P / \partial X}{\partial P / \partial Z} - \frac{\pi \cdot H^2}{6 \cdot B} \cdot \frac{1}{1-F_1} \cdot \left( B^2 \cdot \frac{(\partial P / \partial X)^2}{\partial P / \partial Z} + \frac{\partial P}{\partial Z} \right)$$

Für das unendlich breite Lager vereinfacht sich die Gleichung (72) für die Verschiebungsgeschwindigkeit  $U_1$

$$(74) \quad U_1 = \frac{\Omega}{2} - \frac{\pi \cdot H^2}{6} \cdot \frac{1}{1-F_1} \cdot \frac{\partial P}{\partial X}$$

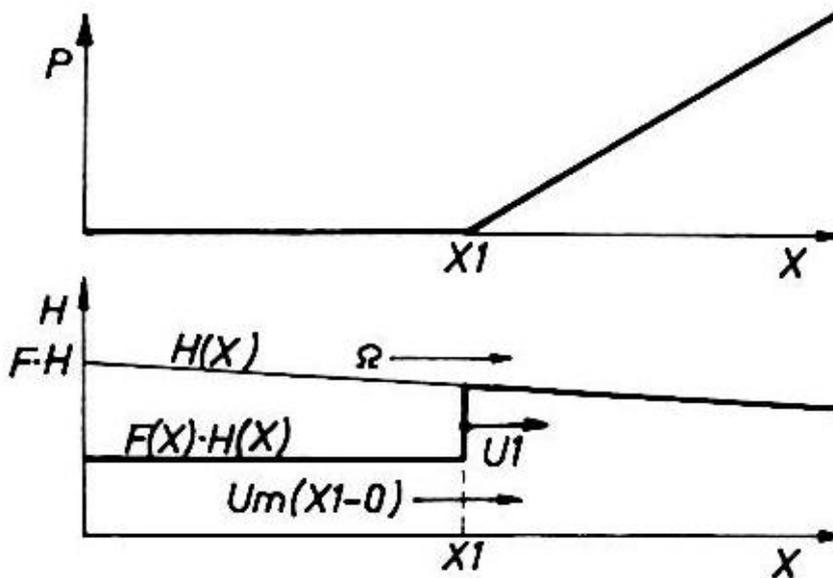
## 5.5 Der Unterschied zwischen Druckberganfang und Druckbergende

Anhand des übersichtlicheren Falls, dem unendlich breiten Lager, sollen nun einige Überlegungen zu den Begriffen "Druckberganfang" und "Druckbergende" folgen. Zunächst eine Präzisierung der Begriffe, entsprechend ihres üblichen Gebrauchs.

**Definition 1:** Die Grenze zwischen einem Unterdruckgebiet  $p=0$  und einem Druckberg  $p>0$  heißt Druckberganfang, wenn das Schmiermittel aus dem Unterdruckgebiet über die Grenze in den Druckberg strömt.

**Definition 2:** Die Grenze zwischen einem Unterdruckgebiet  $p=0$  und einem Druckberg  $p>0$  heißt Druckbergende, wenn das Schmiermittel aus dem Druckberg über die Grenze in das Unterdruckgebiet strömt.

Gegeben ist ein unendlich breiter Schmierspalt (Bild 13), in dem sich in Richtung der negativen x-Achse ein Unterdruckgebiet und in Richtung der positiven x-Achse ein Druckberg befindet.



**Bild 13: Druckberggrenze im unendlich breiten Schmier-spalt**

Die Druckberggrenze  $X_1$  soll entsprechend der Definition 1 ein Druckberganfang sein. Das ist dann der Fall, wenn gilt

$$U_m(X_1 - \Delta X) = \Omega/2 > U_1$$

oder

$$\Omega/2 - U_1 > 0$$

Weiterhin gilt

$$\frac{\partial P}{\partial X} \geq 0$$

$$1 - F_1 \geq 0$$

Mit diesen drei Bedingungen ist die Übergangsgleichung (75) (abgeleitet aus Gleichung 74) vereinbar

$$(75) \quad \frac{\Omega}{2} - U_1 = \frac{\pi \cdot H^2}{6} \cdot \frac{1}{1 - F_1} \cdot \frac{\partial P}{\partial X}$$

und Gleichung (74) ist eine Bestimmungsgleichung für  $U_1$ . Es zeigt sich anhand der Gleichung, daß der Sprung des örtlichen Füllungsgrades von  $F_1 < 1$  im Gebiet  $p=0$  auf den Wert  $F=1$  im Gebiet  $p>0$  und ein Druckanstieg  $\frac{\partial P}{\partial X} > 0$  direkt an der Grenze für den Druckberganfang nicht nur zulässig, sondern eine notwendige Bedingung ist.

Als nächstes soll die Druckberggrenze  $X_2$  entsprechend der Definition 2 ein Druckbergende sein. Das ist der Fall, wenn gilt

$$U_m(X_2 - \Delta X) = \Omega/2 < U_2$$

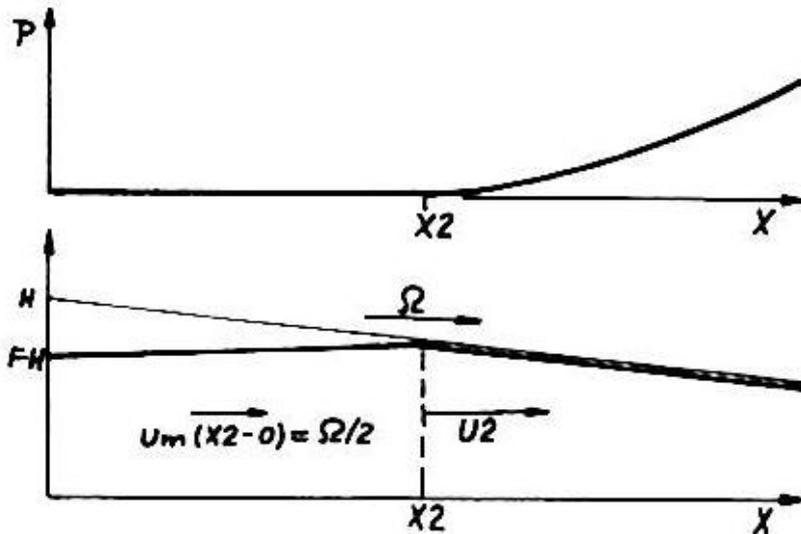
oder

$$\Omega/2 - U_2 < 0$$

Da der Druckberganstieg  $\frac{\partial P}{\partial X}$  am Druckbergend und der Ausdruck  $1 - F_2$  nicht negativ werden können, ist die Übergangsbedingung (75) für eine endliche Verschiebungsgeschwindigkeit  $U_2$  nur dann erfüllt, wenn gilt (Bild 14)

$$(76) \quad \frac{\partial P(x_2)}{\partial x} = 0$$

$$(77) \quad F_2 = F(x_2 - 0) = 1$$



**Bild 14: Bedingungen am Druckbergende**

Diese Bedingungen führen in der Übergangsgleichung (75) zu einem unbestimmten Ausdruck

$$(78) \quad \frac{\Omega}{2} - U_2 = \frac{\pi \cdot H^2}{6} \cdot \frac{0}{0}$$

Deshalb ist die Verschiebungsgeschwindigkeit am Druckbergende nicht direkt zu berechnen, sondern sie ergibt sich nur iterativ aus der Erfüllung der Bedingung des glatten Auslaufs (s.o.), wie sie von Reynolds formuliert wurde und als Reynolds'sche Randbedingungen auf das stationär belastete Lager angewendet wird.

Die hier gezeigten Erscheinungen gelten natürlich entsprechend, wenn die Lage der beiden Gebiete vertauscht ist.

#### **Zusammenfassung:**

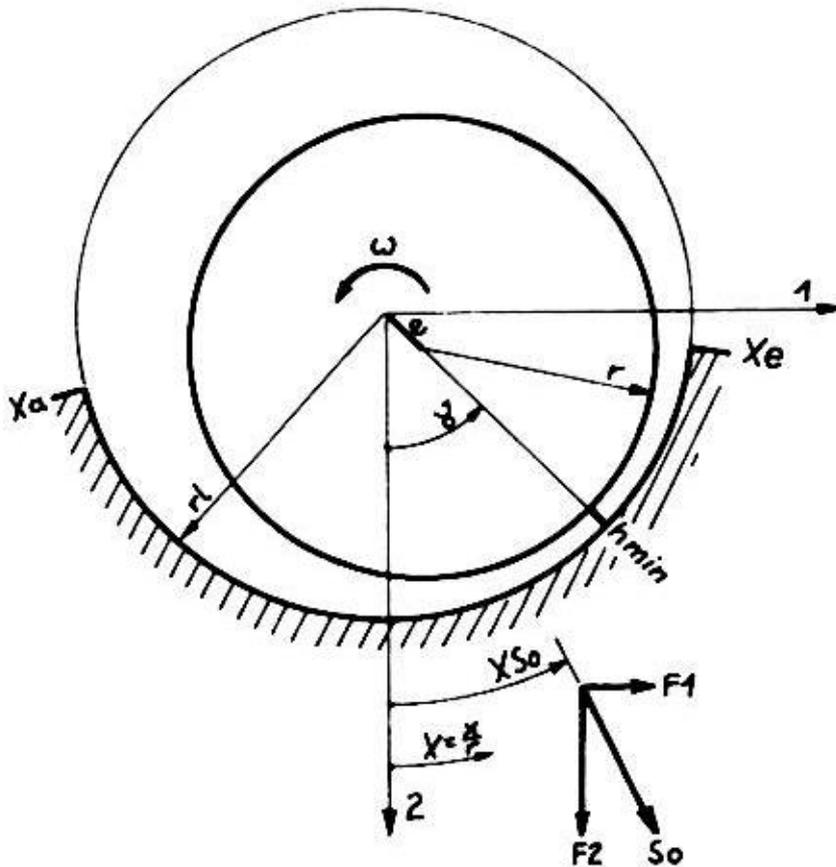
- Es gibt zwei verschiedene Arten der Druckbergbegrenzungen, für die die Begriffe "Druckberganfang" und "Druckbergende" eingeführt wurden.
- Die oben abgeleitete Übergangsbedingung (75) gilt allgemein für beide Arten.
- Der Druckberganfang ist charakterisiert durch einen Sprung im Verlauf des örtlichen Füllungsgrades  $F$  (Flüssigkeitsstau) und durch einen Knick im Druckverlauf  $P$ . Für ihn stellt die Übergangsbedingung eine Bestimmungsgleichung für die Verschiebungsgeschwindigkeit dar.
- Für das Druckbergende gilt die Bedingung des glatten Auslaufs, durch die sich die Verschiebung des Druckbergendes ergibt. Der Verlauf des örtlichen Füllungsgrades  $F$  macht keinen Sprung.

Diese Aussagen gelten analog für das endlich breite Lager, wo die Druckberggrenze eine kontinuierliche Linie um das Unterdruckgebiet ist.

Damit ist das Modell 2 mit der Annahme idealer Kavitation vollständig beschrieben.

## 6 Weitere Formeln

### 6.1 Spaltgeometrie



**Bild 15: Spaltgeometrie des achsparallelen Lagers mit kreisrunder Welle und kreisrunder Lagerschale**

Für das achsparallele Lager mit kreisrunder Welle und kreisrunder Lagerschale ergibt sich die Spaltgeometrie (Bild 15) durch

$$(79) \quad h = \frac{s}{2} - e \cdot \cos\left(\frac{x}{r} - \gamma\right)$$

Dabei ist

s - Lagerspiel

e - Exzentrizität

$\gamma$  - Verlagerungswinkel

In dimensionsloser Form sind die Spalthöhe und ihre Ableitungen gegeben durch

$$(80) \quad H = 1 - E \cdot \cos(X - \gamma)$$

$$(81) \quad \frac{\partial H}{\partial X} = E \cdot \sin(X - \gamma)$$

$$(82) \quad \frac{\partial H}{\partial Z} = 0$$

$$(83) \quad \frac{\partial H}{\partial T} = -\frac{\partial E}{\partial T} \cdot \cos(X - \gamma) - E \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial T} \cdot \sin(X - \gamma)$$

wobei

$$(35) \quad X = \frac{x}{r} \quad (36) \quad Z = \frac{2 \cdot z}{b}$$

$$(39) \quad H = \frac{2 \cdot h}{s} \quad (40) \quad T = \frac{\omega b \cdot t}{2}$$

$$(84) \quad E = \frac{2 \cdot e}{s}$$

Es können beliebige andere Spaltkonturen eingeführt werden (dazu [25]). Da diese aber nicht Gegenstand der Arbeit sind, wird hier nur der einfachste Fall eingeführt.

## 6.2 Resultierende Lagerbelastung

Es wird das lagerschalenfeste Koordinatensystem 1-2 eingeführt (Bild 15). Die Lagerbelastung  $f$  besteht aus den Komponenten  $f_1$  und  $f_2$ .

Für das endlich breite, teilweise umschlossene Lager ergeben sich die Komponenten  $f_1$  und  $f_2$  aus dem Druckverlauf  $p(x, z)$

$$(85) \quad f_1 = \int_{x_a}^{x_e} \int_{z_a}^{z_e} p \cdot \sin \frac{x}{r} \cdot dz \cdot dx$$

$$(86) \quad f_2 = \int_{x_a}^{x_e} \int_{z_a}^{z_e} p \cdot \cos \frac{x}{r} \cdot dz \cdot dx$$

und die Lagerbelastung  $f$  durch

$$(87) \quad f = \sqrt{f_1^2 + f_2^2}$$

Für die Lagerbelastung  $f$  und ihre Komponenten  $f_1$ ,  $f_2$  werden die dimensionslosen Größen  $S_0$  (Sommerfeldzahl),  $F_1$  und  $F_2$  eingeführt.

$$(88) \quad S_0 = \frac{f}{b \cdot d} \cdot \frac{S^2}{\eta \cdot \omega b}$$

$$(89) \quad F_1 = \frac{f_1}{b \cdot d} \cdot \frac{S^2}{\eta \cdot \omega b}$$

$$(90) \quad F_2 = \frac{f_2}{b \cdot d} \cdot \frac{S^2}{\eta \cdot \omega b}$$

Damit berechnen sich diese aus den dimensionslosen Werten  $P(X, Z)$  durch

$$(91) \quad F1 = \frac{1}{4} \cdot \int_{Xa}^{Xe} \int_{-1}^{+1} P \cdot \sin X \cdot dZ \cdot dX$$

$$(92) \quad F2 = \frac{1}{4} \cdot \int_{Xa}^{Xe} \int_{-1}^{+1} P \cdot \cos X \cdot dZ \cdot dX$$

$$(93) \quad So = \sqrt{F1^2 + F2^2}$$

Für das unendlich breite Lager lauten die Gleichungen

$$(94) \quad F1 = \frac{1}{2} \cdot \int_{Xa}^{Xe} P \cdot \sin X \cdot dX$$

$$(95) \quad F2 = \frac{1}{2} \cdot \int_{Xa}^{Xe} P \cdot \cos X \cdot dX$$

Die Richtung  $X_{So}$  der resultierenden Belastung ist gegeben durch

$$(96) \quad X_{So} = \arctan(F1/F2)$$

### 6.3 Gesamtfüllungsgrad

Der Gesamtfüllungsgrad  $F_{ges}$  (9) soll jetzt noch aus den dimensionslosen Größen berechnet werden.

Für das endlich breite, teilweise umschlossene Lager gilt

$$(97) \quad F_{ges} = \frac{FH_{ges}}{H_{ges}} = \frac{\int_{Xa}^{Xe} \int_{-1}^{+1} F \cdot H \cdot dZ \cdot dX}{\int_{Xa}^{Xe} \int_{-1}^{+1} H \cdot dZ \cdot dX}$$

Für das unendlich breite, teilweise umschlossene Lager gilt

$$(98) \quad F_{ges} = \frac{FH_{ges}}{H_{ges}} = \frac{\int_{Xa}^{Xe} F \cdot H \cdot dX}{\int_{Xa}^{Xe} H \cdot dX}$$

## 7 Numerisches Lösungsverfahren

### 7.1 Allgemeines

Das Modell 1 mit der Annahme eines Flüssigkeits-Gas-Gemischs führt auf eine nicht-lineare, partielle Differentialgleichung (44) zweiter Ordnung mit den unabhängigen Variablen  $X$ ,  $Z$  und  $T$ . Bezüglich der Ortsvariablen  $X$  und  $Z$  handelt es sich um ein Randwertproblem. Bezüglich der Zeitvariablen  $T$  um ein Anfangswertproblem. Ein Vorteil des Modells 1 gegenüber Modell 2 für die numerische Lösung ist, daß die Verhältnisse im gesamten Schmierpalt durch eine Gleichung beschrieben werden. Ein Nachteil ist, daß die Gleichung nichtlinear ist und ein Randwert- und Anfangswertproblem zugleich darstellt, wofür es keine fertigen Lösungsverfahren gibt.

Das Modell 2 mit der Annahme idealer Kavitation führt zu der Reynolds'schen Differentialgleichung (47), welche eine lineare, partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung ist mit den zwei unabhängigen Variablen  $X$  und  $Z$ . Sie ist ein reines Randwertproblem. Für das Unterdruckgebiet ergibt sich eine lineare, partielle Differentialgleichung (55) erster Ordnung mit den zwei unabhängigen Variablen  $X$  und  $T$ . Sie ist ein Anfangswertproblem. Ein Vorteil des Modells 2 gegenüber dem Modell 1 ist, daß die Lösbarkeit der einzelnen Gleichungen für sich problemlos ist. Für die Reynolds'sche Gleichung gibt es bereits mehrfach erprobte Lösungsmethoden. Die Gleichung für das Unterdruckgebiet ist einfach zu behandeln. Für die numerische Lösbarkeit ist das Problem, daß sich die Schmier-spaltfläche in verschiedene Gebiete aufteilt, deren Begrenzungen beliebige Formen annehmen können und zeitlich veränderlich sind, und daß an diesen Grenzen noch zwei verschiedene Übergangsbedingungen (Druckberganfang oder Druckbergende) gelten, was für den allgemeinen Fall schwer zu formulieren ist.

Aus der Sicht der numerischen Lösbarkeit ist das Modell 1 günstiger, sofern man ein geeignetes Lösungsverfahren für die nichtlineare Differentialgleichung findet. Da dies gelungen ist, wurden die Programme LAGER8 und ENDLA1 für die Berechnung des Druckverlaufs nach der erweiterten Theorie der Schmiermittelströmung auf der Basis des Modells 1 angefertigt. Dadurch wird das Modell 2 jedoch nicht zur nutzlosen theoretischen Beigabe degradiert. Es führt gemeinsam mit Modell 1 zu qualitativen Erkenntnissen und wurde für Sonderfälle zu Vergleichsrechnungen herangezogen (Abschnitt 9).

Zu Vergleichszwecken wurden außerdem die Programme LAGER9 und ENDLA2 aufgestellt, die zur Berechnung des Druckverlaufs die Reynolds'sche Differentialgleichung (48) bzw. (47) verwenden. Dabei wurde der Druckverlauf über die gesamte Spaltfläche einschließlich negativer Drücke berechnet. Anschließend wurden die negativen Werte Null gesetzt (3. Randbedingung).

## **7.2 Grundprinzip der numerischen Lösung der nichtlinearen Differentialgleichung des Modells 1**

Das Differenzenverfahren hat sich für die Lösung der Reynolds'schen Gleichung bewährt. Es ist allerdings nur für lineare Differentialgleichungen geeignet. Es ist zu erwarten, daß sich die nichtlineare Differentialgleichung des Modells 1 im Bereich großer Drücke annähernd wie die Reynolds'sche Gleichung verhält und die Abweichungen hauptsächlich im Gebiet kleiner Drücke liegen. Deshalb wurde versucht, das Differenzenverfahren entsprechend variiert anzuwenden.

Die Grundidee des Verfahrens besteht darin:

- Die nichtlinearen Glieder der Gleichung werden durch ihre linearen Näherungen, bestehend aus den ersten zwei Gliedern der Taylorreihe, ersetzt.
- Der Druckverlauf  $P(X,Z)$  zum Zeitpunkt  $T$  wird ausgehend von einer Näherungslösung  $P_n(X,Z)$  iterativ bestimmt. Als erster Näherungswert wird der Druckverlauf  $P(X,Z)$  vom vorhergehenden Zeitpunkt  $T-\Delta T$  oder extrapolierte Werte verwendet.

## **7.3 Linearisierung der Differentialgleichung des Modells 1**

Die nichtlinearen Glieder werden angenähert und linearisiert durch

$$(99) \quad G(P;PX;PT) \approx G(P_n;P_nX;P_nT) \\
+ \frac{\partial}{\partial P} G(P_n;P_nX;P_nT) \cdot (P - P_n) + \\
+ \frac{\partial}{\partial PX} G(P_n;P_nX;P_nT) \cdot (PX - P_nX) + \\
+ \frac{\partial}{\partial PT} G(P_n;P_nX;P_nT) \cdot (PT - P_nT)$$

wobei

$$(100) \quad PX = \frac{\partial P}{\partial X} \quad (101) \quad P_nX = \frac{\partial P_n}{\partial X}$$

$$(102) \quad PT = \frac{\partial P}{\partial T} \quad (103) \quad P_nT = \frac{\partial P_n}{\partial X}$$

In der Differentialgleichung (44) für den Druckverlauf im Schmierfilm nach Modell I

$$(44) \quad 0 = \frac{\partial^2 P}{\partial X^2} + \frac{1}{B^2} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial Z^2} + \frac{3}{H} \cdot \left( \frac{\partial H}{\partial X} \cdot \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{1}{B^2} \cdot \frac{\partial H}{\partial Z} \cdot \frac{\partial P}{\partial Z} \right) - \\
- \frac{6}{\pi \cdot H^3} \cdot \frac{P}{P+C} \cdot \left( \frac{\Omega}{2} \cdot \frac{\partial H}{\partial X} + \frac{\partial H}{\partial T} \right) - \\
- \frac{6}{\pi \cdot H^2} \cdot \frac{C}{(P+C)^2} \cdot \left( \frac{\Omega}{2} \cdot \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\partial P}{\partial T} \right)$$

werden die nichtlinearen Glieder in folgender Weise ersetzt

$$(103) \quad \frac{P}{P+C} \approx \frac{C}{(P_n+C)^2} \cdot P + \frac{P_n^2}{(P_n+C)^2}$$

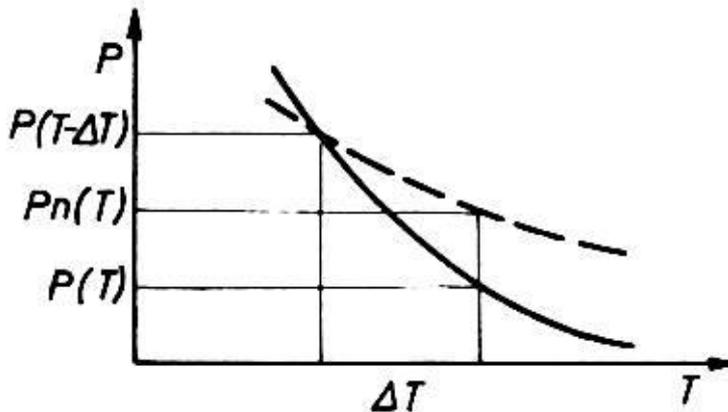
$$(104) \quad \frac{1}{(P+C)^2} \cdot \left( \frac{\Omega}{2} \cdot \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\partial P}{\partial T} \right) \approx - \frac{2}{(P_n+C)^3} \cdot \left( \frac{\Omega}{2} \cdot \frac{\partial P_n}{\partial X} + \frac{\partial P_n}{\partial T} \right) \cdot P + \\
+ \frac{1}{(P_n+C)^2} \cdot \frac{\Omega}{2} \cdot \frac{\partial P}{\partial X} + \\
+ \frac{1}{(P_n+C)^2} \cdot \frac{\partial P}{\partial T} + \\
+ \frac{2 \cdot P_n}{(P_n+C)^3} \cdot \left( \frac{\Omega}{2} \cdot \frac{\partial P_n}{\partial X} + \frac{\partial P_n}{\partial T} \right)$$

Außerdem werden die Ableitungen des Druckes P und dessen Näherung P<sub>n</sub> nach der Zeit T angenähert durch

$$(105) \quad \frac{\partial P_n(T)}{\partial T} \approx \frac{P_n(T)}{P(T-\Delta T)} \cdot \frac{P_n(T) - P(T-\Delta T)}{\Delta T}$$

$$(106) \quad \frac{\partial P(T)}{\partial T} \approx \frac{2 \cdot P_n(T) - P(T - \Delta T)}{P(T - \Delta T) \cdot \Delta T} \cdot P(T) - \frac{P_n^2(T)}{P(T - \Delta T) \cdot \Delta T}$$

Diese Näherungen entstehen durch Verwendung der Hyperbelfunktion (Bild 16) und ihrer Linearisierung.



**Bild 16: Annäherung der zeitlichen Ableitung  $dP/dT$  und  $dP_n/dT$  unter Verwendung der Hyperbelfunktion  $P=a/(T+b)$**

Diese Näherungsfunktion hat sich nach Versuchen mit einigen anderen als günstigste erwiesen. Sie stellt den zeitlichen Druckverlauf  $P(T)$  im Bereich  $P \rightarrow 0$  qualitativ gut dar, und gerade in diesem Bereich erhält das Glied, welches  $\partial P/\partial T$  enthält, Bedeutung.

Damit ergibt sich die linearisierte Differentialgleichung für den Druckverlauf im Gleitlager nach Modell 1 in der für die numerische Lösung aufbereiteten Form

$$(107) \quad \frac{\partial^2 P}{\partial X^2} + A1 \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial Z^2} + A2 \cdot \frac{\partial P}{\partial X} + A3 \cdot \frac{\partial P}{\partial Z} + A4 \cdot P = R$$

wobei

$$(108) \quad C1 = 1/B^2$$

$$(109) \quad C2 = \Omega/2$$

$$(110) \quad C3 = 6/\pi$$

$$(111) \quad C4 = \frac{1}{P(T - \Delta T) \cdot \Delta T}$$

$$(112) \quad \frac{\partial P_n}{\partial T} = C4 \cdot P_n \cdot (P_n - P(T - \Delta T))$$

$$(113) \quad C5 = 3/H$$

$$(114) \quad C6 = C3/H^2$$

$$(115) \quad C7 = \frac{1}{P_n + C}$$

$$(116) \quad C8 = C7^2$$

$$(117) \quad C10 = C2 \cdot \frac{\partial H}{\partial X} + \frac{\partial H}{\partial T}$$

$$(118) \quad C11 = C2 \cdot \frac{\partial P_n}{\partial X} + \frac{\partial P_n}{\partial T}$$

$$(119) \quad C12 = C6 \cdot C8 \cdot C$$

$$(120) \quad C13 = C7 \cdot 2 \cdot C11$$

$$(121) \quad A1 = C1$$

$$(122) \quad A2 = C5 \cdot \frac{\partial H}{\partial X} - C12 \cdot C2$$

$$(123) \quad A3 = C1 \cdot C5 \cdot \frac{\partial H}{\partial Z}$$

$$(124) \quad A4 = C12 \cdot \left[ -\frac{C10}{H} + C13 - C4 \cdot \{2 \cdot P_n - P(T - \Delta T)\} \right]$$

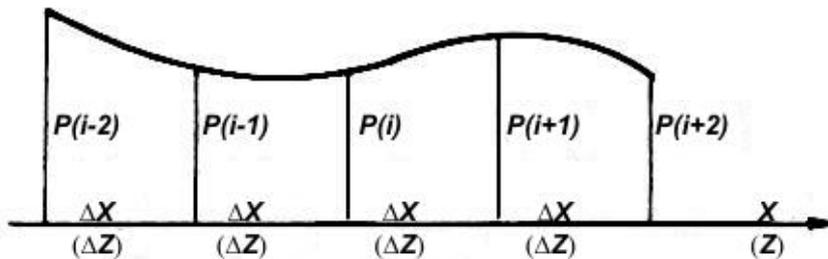
$$(125) \quad R = C12 \cdot P_n \cdot \left( \frac{C10 \cdot P_n}{H \cdot C} + C13 - C4 \cdot P_n \right)$$

#### 7.4 Differenzenverfahren

Die Differentialquotienten

$$\frac{\partial P}{\partial X}; \quad \frac{\partial^2 P}{\partial X^2}; \quad \frac{\partial P_n}{\partial X}; \quad \frac{\partial P}{\partial Z}; \quad \frac{\partial^2 P}{\partial Z^2}$$

werden durch Differenzenquotienten angenähert. Je nach Bedarf werden folgende Differenzenquotienten verwendet:



**Bild 17: Näherungsfunktion (Polynom) zur numerischen Differentiation**

Für den Normalfall (Bild 17)

$$(126) \quad \frac{\partial P(i)}{\partial X} \approx \frac{P(i-2) - 8 \cdot P(i-1) + 8 \cdot P(i+1) - P(i+2)}{12 \cdot \Delta X}$$

$$(127) \quad \frac{\partial^2 P(i)}{\partial X^2} \approx \frac{-P(i-2) + 16 \cdot P(i-1) - 30 \cdot P(i) + 16 \cdot P(i+1) - P(i+2)}{12 \cdot \Delta X^2}$$

Für spezielle Fälle z.B. am Lagerrand

$$(128) \quad \frac{\partial P(i)}{\partial X} \approx \frac{-2 \cdot P(i-1) - 3 \cdot P(i) + 6 \cdot P(i+1) - P(i+2)}{6 \cdot \Delta X}$$

oder

$$(129) \quad \frac{\partial P(i)}{\partial X} \approx \frac{P(i-2) - 6 \cdot P(i-1) + 3 \cdot P(i) + 2 \cdot P(i+1)}{6 \cdot \Delta X}$$

oder

$$(130) \quad \frac{\partial P(i)}{\partial X} \approx \frac{-P(i-1) + P(i+1)}{2 \cdot \Delta X}$$

oder

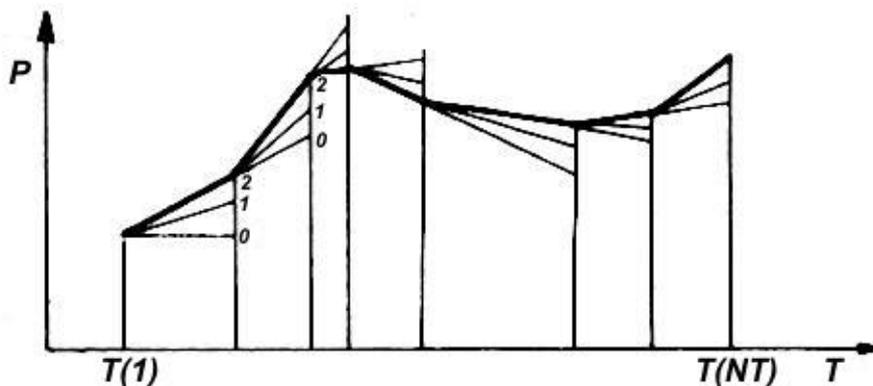
$$(131) \quad \frac{\partial^2 P(i)}{\partial X^2} \approx \frac{P(i-1) - 2 \cdot P(i) + P(i+1)}{2 \cdot \Delta X^2}$$

Analog wird mit  $\partial P/\partial Z$  und  $\partial^2 P/\partial Z^2$  verfahren.

Die Fläche des Schmierspalts wird in ein rechteckiges Gitternetz äquidistanter Schrittweite aufgeteilt (Bild 20, 21, 22). Es wird für jeden Punkt des Gitternetzes, der kein Punkt des Lagerrandes oder einer Schmiernut ist, die Differentialgleichung (107) aufgestellt, welche jetzt als Differenzengleichung eine lineare Gleichung ist. Das führt zu einem linearen Gleichungssystem, dessen Lösung eine Näherungslösung für  $P(X,Z)$  darstellt.

Die Gleichung (107), die zum Aufstellen der Differenzengleichungen verwendet wurde, gilt nur näherungsweise, da sie durch Linearisierung aus der eigentlichen Differentialgleichung (44) entstand. Deshalb wird die Aufstellung und Lösung des linearen Gleichungssystems für einen Zeitpunkt  $T$  mehrfach wiederholt, wobei die Lösung für  $P(X,Z)$  des einen Iterationsschrittes als Näherungswert für den nächsten Schritt verwendet wird. Im allgemeinen reichen dabei zwei Iterationsschritte aus.

Dieses Lösungsverfahren wird, beginnend bei einer vorgegebenen Anfangsdruckverteilung  $P(X,Z)$  zum Zeitpunkt  $T(1)$ , über  $NT-1$  Zeitschritte ausgeführt (Bild 18).



**Bild 18: Iterative Bestimmung des Druckverlaufs  $P(NT)$**

Da bei der Berechnung des Druckverlaufs für eine vollständige Verlagerungsbahn die vorgegebene Anfangsdruckverteilung nicht mit der wirklich vorhandenen übereinstimmt, bedarf die Berechnung einer Anlaufrechnung über mehrere Zeitschritte. In der Regel ist eine halbe Zapfendrehung ausreichend.

## 7.5 Berücksichtigung von Schmiernuten

Mit der erweiterten Schmiertheorie kann man die Verteilung der Schmierflüssigkeit im Spalt berechnen. Damit dieser Vorteil auch wirksam wird, ist es notwendig, die Schmiernutanordnung zu berücksichtigen. Dies wurde gewährleistet, indem durch die Einführung der Steuerfelder  $KX(NZ,NX)$  und  $KZ(NZ,NX)$  und automatisches Aufstellen der Koeffizientenmatrix für das lineare Gleichungssystem beliebige Nutanordnungen und beliebige

Spaltflächen berücksichtigt werden können. Die Bilder 20, 21 und 22 im Anhang zeigen einige mögliche Varianten. Die genaue Beschreibung dazu ist zu finden in der Diplomarbeit von Pfeiffer [24], wo die Programme ENDLAG1 und ENDLAG2 beschrieben werden.

## **8 Gemeinsame Unterschiede der beiden Modelle gegenüber der bisherigen hydrodynamischen Schmiertheorie und neue Untersuchungsmöglichkeiten, die sich daraus ergeben**

Das ursprüngliche Ziel der Erweiterung der hydrodynamischen Schmiertheorie war die Lösung des Problems der Randbedingungen. Durch die konsequente Anwendung der Kontinuitätsbedingung auf den gesamten Schmier-spalt ist für beide Modelle die Lösung des Problems gelungen, indem sich die Lage und die Ausdehnung des Druckberges bei der Berechnung von selbst einstellt. (Bild 24, 25, 38) Außerdem wird dadurch die Wirkung des Unterdruckgebietes, welches vorher aus der Berechnung ausgeschlossen war, auf die Tragfähigkeit quantitativ erfaßt. Diese Verbesserung wird besonders für das instationär belastete Gleitlager wirksam, wo Druckberg und Unterdruckgebiet ständig ihre Lage und Größe verändern, da hier die Randbedingungen nicht mehr aufgrund einfacher Überlegungen oder Beobachtungen angegeben werden können. (Dazu Abschnitte 9.3. und 12.)

Neben der Berechnung des Druckverlaufs im gesamten Schmier-spalt erhält man bei der Anwendung des Modells 1 oder 2 zusätzlich die Flüssigkeitsverteilung im Spalt (Bilder 24, 25, 31, 32, 33, 38). Es kann der Ölzustrom und –abfluß berechnet werden, welcher einen Gleichgewichtsvorgang in Abhängigkeit von der Lagerbelastung und den Umgebungsbedingungen darstellt. Dadurch ist es möglich, die Schmiernutanordnung und den Ölfuhrdruck zu optimieren. Das wechselnd belastete Gleitgelenk (Abschnitt 12.1) stellt ein Beispiel dafür dar. Die Ergebnisse solcher Untersuchungen können direkt in der konstruktiven Gestaltung der Lager verwertet werden.

Nach der weiterentwickelten Schmiertheorie hängt der Druckaufbau im Spalt nicht mehr wie bisher nur von der momentan gegebenen Spaltgeometrie und dessen Änderung ab, sondern auch vom vorhergehenden Druckverlauf und der damit verbundenen Schmiermittelverteilung ab. Deshalb ist es nur noch sinnvoll, den Druckverlauf für vollständige Verlagerungsbahnen zu berechnen.

Für einen großen Teil der zu untersuchenden Gleitlager ist das Reynolds'sche Modell mit einer der üblichen Randbedingungen ausreichend genau und der erhöhte Aufwand der erweiterten Theorie nicht gerechtfertigt. Es bietet sich hier die Möglichkeit, für einige repräsentative Fälle den Fehler der einfacheren Rechnung zu bestimmen und so deren Geltungsbereich zu ermitteln bzw. Korrekturen anzugeben. Damit wird die Zuverlässigkeit der Anwendung des Reynolds'schen Modells erhöht.

## **9 Vergleich der beiden Modelle miteinander**

Der wesentliche Unterschied der beiden Modelle besteht in der unterschiedlichen Interpretation der Erscheinung der Blasenbildung, erstens als starke Ausdehnung bereits vorhandener Blasen nach Modell 1 und zweitens als Entstehung von Blasen durch Verdampfen der Flüssigkeit bei niedrigem Druck nach Modell 2. Daraus ergeben sich verschiedene Volumen-Druck-Gesetze für das Schmiermittel (Bild 2, 7), verschiedene mathematische Darstellungen der Schmiermittelströmung und verschiedene Probleme bei der numerischen Lösung.

Aufgrund dieser Unterschiede stellen die beiden Modelle jedoch nicht einfach zwei verschiedene Forschungsergebnisse dar, die zueinander im Widerspruch stehen, von denen sich eins als richtig und das andere als falsch erweisen wird, sondern sie sollen als eine Einheit aufgefaßt werden. Diese Einheit soll hier in der Weise verstanden werden, daß durch die unterschiedlichen Modelle verschiedene Seiten der untersuchten Erscheinung

hervorgehoben werden, sich diese gegenseitig ergänzen und gemeinsam betrachtet ein besseres Bild über das Verhalten des Schmiermittels liefern, als jedes der Modelle für sich. Unter diesem Gesichtspunkt sollen einige Untersuchungen folgen.

### 9.1 Mathematischer Zusammenhang der Modelle

Nach Modell 1 wird die gesamte Strömung im Schmierespalt durch die Gleichung (44) beschrieben.

$$(44) \quad 0 = \frac{\partial^2 P}{\partial X^2} + \frac{1}{B^2} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial Z^2} + \frac{3}{H} \cdot \left( \frac{\partial H}{\partial X} \cdot \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{1}{B^2} \cdot \frac{\partial H}{\partial Z} \cdot \frac{\partial P}{\partial Z} \right) -$$

$$- \frac{6}{\pi \cdot H^3} \cdot \frac{P}{P+C} \cdot \left( \frac{\Omega}{2} \cdot \frac{\partial H}{\partial X} + \frac{\partial H}{\partial T} \right) -$$

$$- \frac{6}{\pi \cdot H^2} \cdot \frac{C}{(P+C)^2} \cdot \left( \frac{\Omega}{2} \cdot \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\partial P}{\partial T} \right)$$

Die Mischungskonstante C in dieser Gleichung gibt die Mengenverhältnisse zwischen flüssiger und gasförmiger Phase an. Wenn man davon ausgeht, daß bei atmosphärischem Druck die Volumenanteile Gas im Schmiermittel gering sind, muß für C ein kleiner Wert angenommen werden. Der kleinste mögliche Wert für die Mischungskonstante C ist Null, was bedeuten würde, daß im Schmiermittel keine Gasmenge enthalten ist.

Läßt man in der Gleichung (44) den Wert C gegen Null gehen unter der Bedingung  $P > 0$ , so erhält man die Reynolds'sche Differentialgleichung

$$(47) \quad 0 = \frac{\partial^2 P}{\partial X^2} + \frac{1}{B^2} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial Z^2} + \frac{3}{H} \cdot \left( \frac{\partial H}{\partial X} \cdot \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{1}{B^2} \cdot \frac{\partial H}{\partial Z} \cdot \frac{\partial P}{\partial Z} \right) - \frac{6}{\pi \cdot H^3} \cdot \left( \frac{\Omega}{2} \cdot \frac{\partial H}{\partial X} + \frac{\partial H}{\partial T} \right)$$

die den Druckverlauf im Druckberg nach Modell 2 ergibt.

Die Gleichung (44) für den Druckverlauf P nach Modell 1 kann mit Hilfe der Transformationsgleichung

$$(46) \quad F = \frac{P}{P+C}$$

umgestellt werden als Gleichung für den Verlauf des Füllungsgrades F.

$$(132) \quad 0 = F \cdot \left( \frac{\Omega}{2} \cdot \frac{\partial H}{\partial X} + \frac{\partial H}{\partial T} \right) + H \cdot \left( \frac{\Omega}{2} \cdot \frac{\partial F}{\partial X} + \frac{\partial F}{\partial T} \right) -$$

$$- \frac{\pi \cdot H^3}{6} \cdot \frac{C}{(1-F)^2} \cdot \left( \frac{\partial^2 F}{\partial X^2} + \frac{1}{B^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial Z^2} \right) -$$

$$- \frac{\pi \cdot H^3}{6} \cdot \frac{C \cdot 2}{(1-F)^3} \cdot \left[ \left( \frac{\partial F}{\partial X} \right)^2 + \frac{1}{B^2} \cdot \left( \frac{\partial F}{\partial Z} \right)^2 \right] -$$

$$- \frac{\pi \cdot H^2}{2} \cdot \frac{C}{(1-F)^2} \cdot \left( \frac{\partial H}{\partial X} \cdot \frac{\partial F}{\partial X} + \frac{1}{B^2} \cdot \frac{\partial H}{\partial Z} \cdot \frac{\partial F}{\partial Z} \right)$$

Läßt man in dieser Gleichung den Wert C gegen Null gehen unter der Bedingung Füllungsgrad  $F < 1$ , so ergibt sich die Gleichung (56) für die Strömung im Unterdruckgebiet  $P=0$  nach Modell 2.

$$(56) \quad 0 = F \cdot \left( \frac{\Omega}{2} \cdot \frac{\partial H}{\partial X} + \frac{\partial H}{\partial T} \right) + H \cdot \left( \frac{\Omega}{2} \cdot \frac{\partial F}{\partial X} + \frac{\partial F}{\partial T} \right)$$

Damit ist ein mathematischer Zusammenhang zwischen den beiden Modellen hergestellt, in der Weise, daß das Modell 2 den Grenzfall des Modells 1 darstellt. Es ist also zu erwarten, daß die Berechnungsergebnisse der beiden Modelle trotz der verschiedenen Annahmen gute Übereinstimmung ergeben werden. Da im realen Schmiermittel die Ausdehnung vorhandener Blasen und Verdampfung gemeinsam auftreten können, können dann die realen Verhältnisse durch die beiden Modelle recht gut eingegrenzt werden.

## 9.2 Vergleich anhand eines Beispiels

Zur Bestätigung der oben genannten Schlußfolgerung soll ein zahlenmäßiger Vergleich folgen.

Die Bilder 24, 25 stellen den Druckverlauf  $P(X)$ , den örtlichen Füllungsgrad  $F(X)$  und die Flüssigkeitsverteilung  $FH(X)$  im unendlich breiten, halbumschlossenen, stationär belasteten Gleitlager dar, berechnet nach dem Modell 1 bzw. nach dem Modell 2. Dabei ist die Mischungskonstante mit  $C=0,03$  für Modell 1 noch relativ groß gewählt. Die Ergebnisse stimmen tatsächlich gut überein.

Das bedeutet, daß die nichtlineare Differentialgleichung (44) des Modells 1 in der Lage ist, je nach Größe des Drucks  $P$  ihren Charakter zu wandeln. Sie verhält sich bei Werten  $P \gg 0$  praktisch wie die lineare Differentialgleichung (47) des Modells 2 für den Druckberg und bei Werten  $P \rightarrow 0$  wie die Kontinuitätsgleichung (56) für die Strömung im Unterdruckgebiet nach Modell 2.

Diese Aussage wird durch die Koeffizientenanalyse an einigen Stellen des nach Modell 1 berechneten Druckverlaufs für das oben genannte Beispiel bestätigt (Tafel 1). Innerhalb des Druckberges haben nur die Summanden  $S_1$ ,  $S_2$  und  $S_3$  Gewicht, die die Reynolds'sche Differentialgleichung darstellen, abgesehen von dem Faktor  $P/(P+C)$ , der hier annähernd Eins ist. Innerhalb des Unterdruckgebietes haben nur die Summanden  $S_3$  und  $S_4$  Gewicht. Diese beiden stellen die Kontinuitätsgleichung (56) dar für die Strömung des Schmiermittels im Unterdruckgebiet nach Modell 2. Das läßt sich leicht überprüfen, indem man in die Gleichung

$$(133) \quad 0 = S_3 + S_4 \quad (\text{Tafel 1})$$

mit Hilfe der Transformationsgleichung

$$(46) \quad F = \frac{P}{P+C}$$

den Füllungsgrad  $F$  einführt und den Druck  $P$  eliminiert.

Tafel 1: Koeffizientenanalyse der Differentialgleichung (44) für den Druckverlauf im Schmierpalt nach Modell 1 (Beispiele Bild 24, 25)

$X$	$P$	$0 = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$ $0 = \frac{\partial^2 P}{\partial X^2} + \frac{3}{H} \frac{\partial H}{\partial X} \frac{\partial P}{\partial X} - \frac{6}{\pi \cdot H^3} \frac{P}{P+C} \left( \frac{\Omega}{2} \frac{\partial H}{\partial X} + \frac{\partial H}{\partial T} \right) - \frac{6}{\pi \cdot H^2} \frac{C}{(P+C)^2} \left( \frac{\Omega}{2} \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\partial P}{\partial T} \right)$ $\left\{ -\frac{6}{\pi \cdot H^3} \left( \frac{\Omega}{2} \frac{\partial H}{\partial X} + \frac{\partial H}{\partial T} \right) \right\}$	
-0,785 (-45°)	6,935	0,00=14,21- 55,19 + {+ 41,43 }	Druckberg
-0,327 (-18,75°)	12,531	0,00=-104,94-3,04 + {+ 108,30 }	Druckberg
0,785 (45°)	0,037	-0,05= 0,51 - 0,42 - {- 41,43 }	Unterdruck- gebiet

1,178 (67,5°)	0,016	-0,01= 0,08 - 0,08 -	4,59	+	4,58	Unterdruck- gebiet
		{-	13,28 }			

### 9.3 Untersuchungen zum Druckberganfang

Nach dem Modell 2 ergeben sich im Schmierspalt zwei qualitativ verschiedene Bereiche, der Druckberg und das Unterdruckgebiet. Dadurch ergeben sich Übergangsstellen, an denen Knicke bzw. Sprungstellen im Druckverlauf  $P$  bzw. im Verlauf des örtlichen Füllungsgrades  $F$  auftreten, die hier theoretisch begründet sind. Dagegen sind die Verläufe für  $P$  und  $F$  nach dem Modell 1 im gesamten Spalt stetig differenzierbare Funktionen. Wie verhält sich nun das Modell 1 an den Stellen, wo nach Modell 2 die Qualität der Strömung umschlägt ?

An der Stelle des Druckbergendes ist das ziemlich unproblematisch, da auch nach Modell 2 durch die Bedingung des glatten Auslaufes  $\partial P(X_2)/\partial X=0$  sich die Druckverläufe glatt aneinanderfügen. Der Knick im Verlauf des Füllungsgrades ist im Modell 1 abgerundet (Bild 24).

Problematisch ist es an der Stelle des Druckberganfangs, da hier nach Modell 2 ein Knick im Druckverlauf 2 und sogar ein Sprung im Verlauf des örtlichen Füllungsgrades  $F$  auftritt. Deshalb wurde für den Druckberganfang am übersichtlichen Beispiel eines unendlich breiten Gleitschuhs mit konstanter Spalthöhe  $H=1$  eine ausführliche Vergleichsrechnung durchgeführt, die in den Bildern 26 und 27 dargestellt ist.

Bild 26 zeigt den stationären Druckberganfang  $X_1$ , der sich einstellt, wenn sich die Gleitflächen mit einer Relativgeschwindigkeit von  $\Omega=1$  zueinander bewegen. Der Spalt wird am Anfang  $X_a$  mit einem Füllungsgrad von  $F=0,5$  versorgt. Am Spaltende  $X_e$  herrscht ein Druck von  $P=0,25$ .

Bild 27 zeigt den instationären Druckberganfang  $X_1$  und seine Verschiebungsgeschwindigkeit  $U_1(X_1)$ , wenn zwischen den Gleitflächen keine Relativbewegung stattfindet. Der Spalt ist anfangs gleichmäßig halb gefüllt, d.h.  $F(X)=0,5$  für  $X_a \leq X < X_e$ . Am Spaltende  $X_e$  herrscht ein Druck von  $P=0,25$ .

Der Druckberganfang  $X_1$ , der nach Modell 1 eigentlich nicht gegeben ist, wurde hier bestimmt, indem der Druckverlauf  $P(X)$  im Druckberg  $P \gg 0$  geradlinig verlängert wurde. Der Schnittpunkt mit der Achse  $P=0$  ergab dann den Druckberganfang  $X_1$ . Die Druckverläufe  $P(X)$  und örtlichen Füllungsgrade  $F(X)$  mit gleichem Druckberganfang  $X_1$  wurden verglichen.

Obwohl nach Modell 1 ein Qualitätssprung am Druckberganfang von der Theorie her nicht gegeben ist, ist an den berechneten Funktionsverläufen eindeutig zu erkennen, daß dieser quantitativ doch vollzogen wird. Er wird umso ausgeprägter, je kleiner die Mischungskonstante  $C$  gewählt wird. Auch hier ergeben beide Modelle gute Übereinstimmung.

An dieser Stelle erweist sich die angewendete vergleichende Betrachtungsweise als nützlich, denn es wurde dadurch folgendes Problem gelöst: Beim Testen des numerischen Lösungsverfahrens zur Berechnung des Druckverlaufs nach Modell 1 traten im Bereich kleiner Werte für  $P$  d.h. im Unterdruckgebiet numerische Instabilitäten auf, die stärker wurden, je kleiner die Mischungskonstante  $C$  gewählt wurde. Die Ursache dafür wurde gefunden durch den Vergleich mit Modell 2, indem erkannt wurde, daß der zu berechnende Druckverlauf im Bereich des Druckberganfangs einen physikalisch bedingten Knick aufweist, was zum Versagen der Konvergenz führen kann. Dadurch konnten die entsprechenden Maßnahmen eingeleitet werden.

## 9.4 Schlußfolgerungen aus dem Vergleich

Da die Ergebnisse nach den beiden Modellen quantitativ gut übereinstimmen, kann man bei der Entscheidung, welches Modell zur numerischen Lösung verwendet wird, von lösungstechnischen Gesichtspunkten ausgehen.

Es hat sich gezeigt, daß die verschärften Annahmen, entweder nur Gemischbildung aus zwei nicht ineinanderübergehenden Phasen (Modell 1) oder Blasenbildung nur durch Verdampfung (Modell 2) zulässig sind, da der reale Fall zwischen den zwei Extremen liegt, die bereits gut übereinstimmen. Es entfällt damit auch das Problem, im konkreten Fall zu entscheiden, ob es sich um Verdampfung oder um sich ausdehnende Blasen handelt.

Es ergeben sich daraus auch methodische Schlußfolgerungen: Es wird erneut bestätigt, daß eine einheitliche, vergleichende (dialektische) Betrachtungsweise von verschiedenen Gesichtspunkten aus einen größeren Erkenntnisgewinn bringt als eine einseitige Darstellung des realen Vorgangs durch nur ein Modell und dessen formale Anwendung. Es wäre auch falsch, beide Modelle völlig getrennt zu betrachten, und sie einfach als einander logisch widersprechende Darstellungen anzusehen.

## 10 Einfluß der Mischungskonstanten C

Im Modell 1 erscheint mit der Mischungskonstanten C eine neue Stoffkonstante, die das Mengenverhältnis zwischen flüssiger und gasförmiger Phase angibt. Man könnte sie für das jeweilige Öl unter verschiedenen Betriebsbedingungen experimentell bestimmen und entsprechend in der Berechnung berücksichtigen.

Im folgenden Berechnungsbeispiel (Bild 28, 29) wurde die Mischungskonstante C im großen Intervall  $0 \leq C \leq 0,5$  variiert, um ihren Einfluß auf die Druckentwicklung und Ölverteilung im Lager zu ermitteln. Bei kleinen Mischungskonstanten C nähert sich der Druckverlauf  $P(X)$  und der Verlauf des örtlichen Füllungsgrades  $F(X)$  denen von Modell 2. Bei großen Mischungskonstanten verwischen sich die Übergänge zwischen Druckberg und Unterdruckgebiet immer mehr. Im gesamten Intervall zeigt sich jedoch nur ein geringer Einfluß auf die Tragfähigkeit. Das wird auch bestätigt durch Experimente von Carl [13]. Er beschreibt Versuche mit künstlich verschäumtem Öl, bei denen sich durch die Verschäumung keine Tragfähigkeitsverluste zeigten.

Damit entfällt die Mischungskonstante C als zusätzlich zu bestimmende Stoffkennzahl, was die Arbeit mit dem Modell erleichtert.

Die Mischungskonstante C spielt eine Rolle im Druck-Volumen-Gesetz des Gemischs

$$(13) \quad v = v_f \cdot \frac{p + c}{p}$$

oder

$$(14);(46) \quad F = \frac{p}{p + c} = \frac{P}{P + C}$$

Da der konkrete Wert für C nicht entscheidend ist, ist auch gezeigt, daß es bei diesem Zusammenhang zwischen Druck und Volumen nur auf den qualitativ richtigen Verlauf ankommt. Damit ist auch begründet, daß es egal ist, welche Zustandsänderung für die Gasblasen angenommen wird und deshalb die mathematisch einfachere isotherme Zustandsänderung gerechtfertigt ist.

Wenn man davon ausgeht, daß die Gasphase im Schmiermittel bei Umgebungsdruck 10 Vol.% nicht überschreitet, so liegt die Konstante C allgemein unter 0,1. Sehr kleine Mischungskonstanten führen aber bei großen Schrittweiten und hohen Exzentrizitäten leicht zu numerischen Instabilitäten, die bereits oben erwähnt wurden (Abschnitt 9.3.). Hier ist es möglich, die Instabilität zu beseitigen, indem man C vergrößert. Dabei entstehen keine nennenswerten Fehler in der Tragfähigkeit.

## 11 Überprüfung der Theorie anhand der Experimente von Cole und Hughes, Anwendbarkeit der Theorie bei Blasenansammlung im Unterdruckgebiet

Unter den Experimenten mit durchsichtigen Lagerschalen zeichnen sich die von Cole und Hughes [9] durch klare Bilder und ausreichende Zahlenangaben aus. Die verwendeten Lagerschalen bestanden außerdem aus Glas, so daß die Belastungen denen in realen Lagern annähernd entsprachen, ohne daß dabei zu große Deformationen des Lagers auftraten. Dadurch ist die Nachrechnung dieser Experimente möglich. Es wurden zwei Beispiele ausgewählt.

Bei der Nachrechnung wurde so vorgegangen, daß die Sommerfeldzahl für den entsprechenden Fall aus der Lagerkraft bestimmt wurde. Dann wurde die Exzentrizität und der Verlagerungswinkel so eingerichtet, daß die Sommerfeldzahl und deren Richtung von Rechnung und Experiment annähernd übereinstimmten. Eine Unsicherheit bei der Bestimmung der Sommerfeldzahl bestand darin, daß die Viskosität nicht direkt gegeben war, sondern nur als Viskositäts-Temperatur-Beziehung. Deshalb mußte anhand der experimentellen Bedingungen auf eine Schmiermitteltemperatur geschlossen werden und eine entsprechende Viskosität angenommen werden.

Zwischen Experiment und Rechnung sind vergleichbar die Form und die ungefähre Lage des Unterdruckgebietes, sowie die Form der sich bildenden Flüssigkeitsstreifen anhand des berechneten örtlichen Füllungsgrades  $F(X,Z)$ .

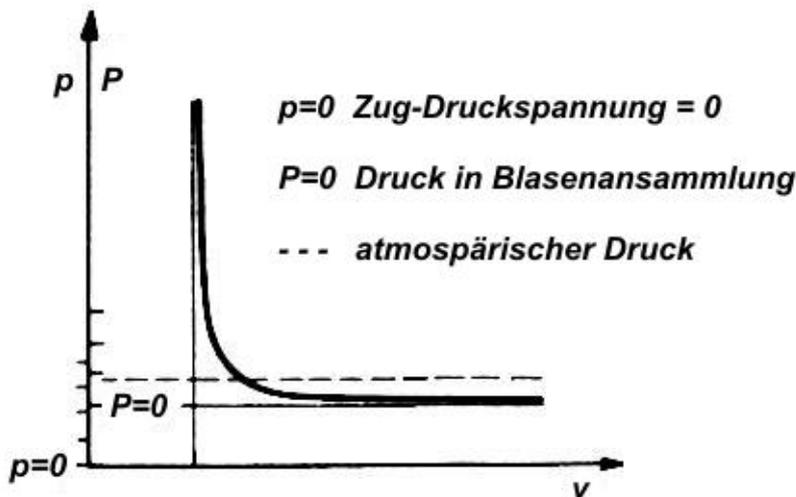
Zunächst wurde das Beispiel Fig. 9 (Bild 30.1) ausgewählt. Durch den hohen Zufuhrdruck ergibt sich bei diesem Beispiel ein ausgeprägter Druckberganfang vor der Ölzuführungsbohrung. Das gesamte Unterdruckgebiet ist im Bild zu erkennen. Bild 31 zeigt den abgewinkelten Schmierpalt mit dem berechneten örtlichen Füllungsgrad  $F(X,Z)$  und der Kontur des Unterdruckgebiets.

Die Berechnung erfolgte anhand des Programms ENDLA1 nach dem Modell 1. Da nach diesem Modell qualitativ kein Unterschied zwischen Druckberg und Unterdruckgebiet gemacht wird und ein fließender Übergang erfolgt, wurde als Grenze des Unterdruckgebiets die Linie  $F=0,9$  verwendet. Der örtliche Füllungsgrad  $F(X,Z)$ , der als kontinuierliche Funktion des Ortes punktweise berechnet wird, wurde im Bild streifenweise aufgetragen, um damit den optischen Eindruck eines streifenweise aufgerissenen Schmierfilms zu erzeugen, was die Vergleichbarkeit erhöht. Die Anzahl der Streifen ist dabei willkürlich und entspricht hier der Teilung des Gitternetzes der numerischen Lösung. In den Bildern stellen die weißen Flächen die flüssige Phase dar. Die schwarzen bzw. schraffierten stellen die gasförmige Phase dar.

Die linke Seite des Bildes 31 zeigt das Ergebnis der Berechnung, bei der der Umgebungsdruck am Lagerrand mit  $P_{r1}=0,9$  angesetzt wurde, was dem atmosphärischen Druck von  $10 \text{ N/cm}^2$  entspricht. Die Kontur des Druckbergendes entspricht gut der des realen Lagers. Bei der Kontur des Druckberganfangs gibt es jedoch Unterschiede. Die Kontur des Druckberganfangs des Versuchslagers deutet darauf hin, daß diese hauptsächlich durch den Flüssigkeitsstau infolge des hohen Zufuhrdrucks am Schmierloch bedingt ist. Infolge des Druckgefälles zwischen Lagerrand und Unterdruckgebiet müßte aber entsprechend der berechneten Kontur des Druckberganfangs (Bild 31 links) vom Lagerrand her Schmiermittel angesogen werden. Das bedeutet, daß im Unterdruckgebiet offenbar nicht der berechnete Unterdruck herrscht, sondern dieser durch Gasansammlung wesentlich höher liegt, was durch Druckmessungen anderer Autoren [6], [7] bestätigt wird.

Deshalb wurde bei einer weiteren Berechnung der Randdruck auf  $P_{r1}=0,25$  und im gleichen Maße der Zufuhrdruck  $P_{r2}$  im Schmierloch reduziert (Bild 31 rechts). Das stellt

eine Anhebung der unteren Grenze des möglichen Drucks dar und entspricht einer Modifizierung des Druck-Volumen-Gesetzes für Modell 1 (Bild 19).



**Bild 19: Modifiziertes Druck-Volumen-Diagramm für Modell 1 bei Gasblasenansammlung im Unterdruckgebiet**

Damit verbessert sich die Übereinstimmung zwischen den Konturen des Druckberganfangs des Versuchslagers und der Berechnung, was die angeführten Überlegungen bestätigt. Die genaue Lage des Druckberganfangs und -endes können wegen der optischen Verzerrung nicht verglichen werden.

Der Vergleich der Form der einzelnen Flüssigkeitsstreifen ergibt auch eine gute Übereinstimmung zwischen Experiment und Rechnung. Ausgehend vom Druckbergende wird der Flüssigkeitsstreifen infolge des sich erweiternden Schmierpalts immer schmäler. Im Versuchslager mündet der Flüssigkeitsstreifen am Druckberganfang in das Gebiet des Druckberges, welches durch eine eindeutige Linie vom Unterdruckgebiet getrennt ist. In der Berechnung erfolgt dieser Übergang nicht so plötzlich. Es ist aber auch die Tendenz zu erkennen. Eine bessere Übereinstimmung ließe sich prinzipiell durch eine kleinere Mischungskonstante  $C$  herstellen, was aber wegen der dadurch auftretenden Instabilitäten aus rechentechnischen Gründen nicht möglich war. Auf das Gesamtergebnis hätte das aber kaum Einfluß.

In der Mitte zwischen Druckbergende und -anfang wurden in Fig. 9 (Bild 30.1) über die Lagerbreite die Flüssigkeitsstreifen ausgemessen, was einen Füllungsgrad von  $F \sim 0,3$  ergab. Die Rechnung ergab  $F \sim 0,25$ , was auch eine gute Übereinstimmung bedeutet.

Als zweites Beispiel wurde Fig. 10 (Bild 30.2) ausgewählt. Hier ist die Schmiermittelzufuhr durch das Schmierloch unterbrochen und eine Ölzufuhr nur von den Lagerrändern her möglich. Bemerkenswert ist dabei, daß unter gleichen Betriebsbedingungen einmal die Ölzufuhr funktioniert und einmal versagt (Fig. 10 a und b, Bild 30.2).

Die linke Seite des Bildes 32 zeigt das Ergebnis der Berechnung, bei der der Umgebungsdruck am Lagerrand mit  $Pr_1 = 0,55$  angesetzt wurde, was dem atmosphärischen Druck von  $10 \text{ N/cm}^2$  entspricht. Die Kontur des Druckberganfangs der Berechnung zeigt gute Übereinstimmung mit der des Prüflagers bei funktionierender Ölzufuhr (Fig. 10a). Nach der Rechnung beginnt aber der Druckaufbau wesentlich zeitiger als im Prüflager. Das bestätigt erneut, daß der Druck im Unterdruckgebiet durch Blasenansammlung erhöht wird.

Deshalb wurde der Randdruck bei einer zweiten Rechnung auf  $Pr_1 = 0,275$  um die Hälfte reduziert (Bild 32 rechts). Damit nähert sich der Beginn des Druckbergs nach der Berechnung dem des Prüflagers. Offenbar war diese Reduktion noch nicht ausreichend, denn der

errechnete Druckberganfang liegt immer noch vor dem von Fig. 10a. Die Tendenz ist aber erkennbar: Im Lager Fig. 10a (Bild 30.2) haben sich bereits Blasen gesammelt. Es ist aber noch ein ausreichendes Druckgefälle zwischen Lagerrand und Unterdruckgebiet vorhanden, daß das Lager ausreichend mit Schmiermittel versorgt wird und die Tragfähigkeit nicht beeinträchtigt wird. Im Lager Fig. 10b (Bild 30.2) ist die Blasenansammlung bereits soweit fortgeschritten, daß die Ölversorgung versagt.

Schlußfolgerung: Die Ölversorgung des Lagers vom Rand her ist möglich, selbst wenn sich teilweise Blasen im Unterdruckgebiet angesammelt haben. Entscheidend ist dabei das Druckgefälle zwischen Unterdruckgebiet und Lagerrand. Sie ist aber aufgrund möglicher stärkerer Blasenansammlungen unzuverlässig, was ihre bewußte praktische Anwendung einschränkt.

Die Nachrechnungen der Experimente von Cole und Hughes haben die erweiterte Schmiertheorie bestätigt. Die Berechnungen am Beispiel Fig. 10 haben gezeigt, daß damit Erscheinungen im Unterdruckgebiet darstellbar sind, die für die Versorgung wichtig sind, und mit der bisherigen Schmiertheorie nicht zu erfassen waren. Es hat sich gezeigt, daß trotz der ursprünglichen Annahme einer gleichmäßigen Verteilung der Gasphase im Schmiermittel die modifizierte Anwendung des Modells 1 bei Ansammlung von Blasen im Unterdruckgebiet möglich ist und zu brauchbaren Ergebnissen führt. Das erweitert die Anwendbarkeit des Modells.

## 12 Das instationär belastete Lager

### 12.1 Das wechselnd belastete Gleitgelenk ohne Drehung

Das wechselnd belastete Gleitgelenk war schon mehrfach Gegenstand der Untersuchungen, weil hier der Druckaufbau nur infolge der Verdrängungswirkung des sich verkleinernden Spaltvolumens erfolgt und die Anwendung der Reynolds'schen Schmiertheorie recht einfach ist. Außerdem liefert es die Verdrängungskomponente, die bei vorgegebener instationärer Belastung zur Berechnung der Verlagerungsbahn benutzt wird. Dabei geht die bisherige Theorie aber davon aus, daß bei Lastrichtungswechsel nach Umkehr der Verlagerungsrichtung der Bereich des Schmierspalt, der vorher Unterdruckgebiet war, sofort vollständig mit Öl gefüllt ist. Diese Annahme soll überprüft werden.

Für ein halbumschlossenes, unendlich breites Gleitgelenk wurde folgende Verlagerungsbahn vorgegeben

$$(134) \quad E = 0,8 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot T)$$

$$(135) \quad \gamma = 0$$

Es wurden der Druckverlauf  $P(X,T)$ , der örtliche Füllungsgrad  $F(X,T)$  und die Flüssigkeitsverteilung  $FH(X,T)$  nach Modell 1 berechnet. Bild 33 zeigt die Ergebnisse für eine vollständige Lastperiode  $T=0$  bis  $1$  (nach einer Anlaufrechnung von  $T=-0,5$  bis  $0$ ). Die linke Seite des Diagramms zeigt die Ergebnisse im Zeitraum  $0$  bis  $0,5$ , in dem sich die Schmierspalthöhe vergrößert. Es zeigt sich, daß der Nachstrom von den Schmiernuten her nur zögernd erfolgt. Dies wird bestätigt durch die Experimente von Gnilke [15] am durchsichtigen, wechselnd belasteten Gleitgelenk. (Leider sind die Versuche nicht quantitativ auswertbar.) Die rechte Seite des Diagramms zeigt die Verhältnisse im Zeitraum  $0,5$  bis  $1$ , während sich der Schmierspalt wieder verengt. Der Ölzustrom geht zunächst weiter. Danach wird die zugeströmte Schmiermittelmenge breitgequetscht bis wieder ein vollständiger Schmierfilm entstanden ist. Bis zu diesem Zeitpunkt erfolgt kein nennenswerter Druckaufbau. Im Diagramm für den Druckverlauf  $F(X)$  sind die Druckverläufe eingetragen, wie sie sich bei unvollständig gefülltem Schmierspalt entsprechend Modell 1 ergeben (Vollinie) und zum Vergleich, wie sie sich nach der bisherigen Theorie ergeben würden bei vollständig gefülltem Spalt (Strich-Punkt-Linie). Der eigentliche Druckaufbau erfolgt erst

nach Bildung eines geschlossenen Schmierfilms und stimmt dann mit der bisherigen Theorie überein.

Bild 34 zeigt für das gleiche Beispiel den zeitlichen Verlauf der Sommerfeldzahl  $So(T)$  und die Gesamtflüssigkeitsmenge  $FH_{ges}(T)$  im Schmier-spalt. Zum Vergleich ist der Verlauf der Sommerfeldzahl bei gleicher Verlagerungsbahn und der Annahme eines ständig gefüllten Schmier-spalts eingetragen (Strich-Punkt-Linie). Es zeigt sich ein erheblicher Tragfähigkeitsverlust infolge der verzögerten Schmier-spaltfüllung. Im praktischen Fall ist jedoch nicht die Verlagerungsbahn vorgegeben, sondern die Lagerbelastung. Hier würde nach Umkehr der Lastrichtung nicht ein verspäteter Druckaufbau stattfinden, sondern die Welle würde soweit durchfallen, bis die Ölmenge, die zu diesem Zeitpunkt vorhanden ist, einen vollständigen Film gebildet hat. Das bedeutet eine Verringerung der Impulsaufnahmefähigkeit des Schmierfilms durch die verzögerte Ölzufuhr und führt zu einer größeren Exzentrizität.

Der praktische Wert dieser Untersuchungen würde sich erhöhen, wenn die Anwendung der erweiterten Theorie im Zusammenhang mit einer Verlagerungsbahnberechnung aus einem vorgegebenen Belastungsverlauf erfolgen würde.

Da die erweiterte Schmiertheorie die Ölnachströmverhältnisse berücksichtigt, bietet sich die Möglichkeit, die Höhe des Ölzufuhrdrucks und die Lage der Schmiernuten zu optimieren. Dazu wurden am Beispiel des wechselnd belasteten Gleitgelenks Variationsrechnungen durchgeführt (Bild 35).

Bei gleicher Schmiernutanordnung (halbumschlossenes Lager) und gleicher Verlagerungsbahn wurde der Zufuhrdruck variiert. Bei der Variante mit dem größeren Zufuhrdruck ist die Impulsaufnahme pro Lastspiel erwartungsgemäß größer als bei der mit kleinerem Zufuhrdruck. Dieser Unterschied ist allerdings nur zum geringen Teil auf einen erhöhten hydrostatischen Druckanteil zurückzuführen. Er beruht hauptsächlich auf der besseren Ölzuführung, was zu einem zeitigeren Druckaufbau führt. Das Optimum für den Zufuhrdruck würde dann dort liegen, wo der konstruktive Aufwand zur Erhöhung des Zufuhrdrucks gerade noch eine ausreichende Erhöhung der Tragfähigkeit bringt.

Bei gleichem Ölzuführungsdruck und gleicher Verlagerungsbahn wurde die Lage der Schmiernuten variiert (halbumschlossenes und ein Drittel umschlossenes Lager). Nach der bisherigen Theorie würde sich für das halbumschlossene Lager aufgrund der größeren tragenden Fläche eine größere Impulsaufnahme ergeben. Die Berechnung nach der erweiterten Theorie ergibt aber eine höhere Impulsaufnahme für das Lager mit kleinerer tragender Fläche. Die Ursache für die größere Impulsaufnahme ist die verbesserte Nachstrombedingung durch den kürzeren Strömungsweg. Der Vorteil des zeitigeren Druckaufbaus ist in diesem Fall größer als der Nachteil der kleineren tragenden Schmier-spaltfläche. Eine weitere wesentliche Verkleinerung der Spaltfläche würde den Vorteil der verbesserten Nachströmung allerdings wieder zunichte machen. Dadurch ist die Möglichkeit der Bestimmung eines Optimums gegeben.

Die Untersuchungen wurden hier zur Ableitung von Tendenzen nur am unendlich breiten Lager durchgeführt. Falls derartige Untersuchungen für konkrete Lagerkonstruktionen ausgeführt werden sollen, wo es auf quantitativ richtige Ergebnisse ankommt, ist die Berücksichtigung der endlichen Breite erforderlich, da der Lagerrand als Stelle des Ölzufusses und -abflusses Bedeutung hat. Dafür wurden ebenfalls die rechentechnischen Voraussetzungen geschaffen. Bild 36 zeigt für ein endlich breites, halbumschlossenes Gleitgelenk mit vorgegebener Verlagerungsbahn (wie oben) den zeitlichen Verlauf der Sommerfeldzahl  $So(T)$  und die Gesamtflüssigkeitsmenge  $FH_{ges}(T)$ , berechnet nach Modell 1. Es zeigt sich qualitativ das gleiche Verhalten wie beim unendlich breiten Lager. Die Ölzufuhr verbessert sich etwas durch die Berücksichtigung des Lagerrandes.

## 12.2 Das instationär belastete Lager mit unrunder Welle

Ausgangspunkt der Untersuchungen zum Problem der Randbedingungen, die zur Erweiterung der hydrodynamischen Schmiertheorie führten, war eine konkrete praktische Aufgabe, nämlich die Untersuchung der Tragfähigkeit von Lagern, deren Geometrie von der kreisrunden Form abweicht. Von der Anwendung der Theorie auf dieses Problem soll hier kurz ein Beispiel gezeigt werden (ausführlich dazu im Forschungsbericht [25]).

Bild 37 zeigt den zeitlichen Verlauf der Tragfähigkeit eines halbumschlossenen, unendlich breiten Lagers mit einem Zapfen, dessen Oberfläche wellig ist, bei vorgegebener Verlagerungsbahn.

Spaltgeometrie des Lagers:

$$(136) \quad H(X,T) = 1 - E \cdot \cos(X-\gamma) - 0,2 \cdot \cos(8 \cdot (X-\Omega \cdot T))$$

Vorgegebene Verlagerungsbahn:

$$(137) \quad E(T) = 0,5 \cdot \sin(4 \cdot \pi \cdot T)$$

$$(133) \quad \gamma(T) = (\pi/4) \cdot \cos(4 \cdot \pi \cdot T)$$

Die Berechnung erfolgte nach Modell 1 (Vollinie) und zum Vergleich nach der Reynolds'schen Differentialgleichung unter Verwendung der 3. Randbedingung (negative P-Werte werden Null gesetzt) (Strichlinie).

Es handelt sich hier um einen stark dynamischen Fall. Während einer Umdrehung der Welle erfolgen zwei Lastspiele. Dementsprechend groß ist auch die Abweichung zwischen der bisherigen und der erweiterten Theorie. Bild 38 zeigt für dieses Beispiel einen Druckverlauf  $P(X)$  und die zugehörige Flüssigkeitsverteilung  $FH(X)$  zu dem Zeitpunkt  $T=0,275$ , zu dem gerade der Druckberg entsteht. Das Beispiel zeigt, daß in solchen Fällen weder der zeitliche Beginn des Druckaufbaus, noch die Lage der Druckbergränder anhand einfacher Überlegungen richtig bestimmt werden kann.

## 13 Zusammenfassung

Mit der vorliegenden Arbeit wird die hydrodynamische Schmiertheorie von Reynolds und Sommerfeld durch zwei Modelle erweitert, die insbesondere die Verhältnisse im Unterdruckgebiet berücksichtigen und dadurch das Problem der Randbedingungen lösen.

Modell 1 geht davon aus, daß sich im Schmiermittel ständig Gasblasen befinden, die sich bei niedrigem Druck stark ausdehnen. Im Modell 2 wird angenommen, daß beim Erreichen des Dampfdrucks eine Blasenbildung durch Verdampfen der Schmierflüssigkeit entsteht.

Die beiden Strömungsmodelle stellen eine Einheit dar. Sie heben zwei verschiedene Seiten der physikalischen Erscheinung der Blasenbildung hervor und grenzen damit den realen Fall ein. Sie führen trotz ihrer unterschiedlichen Deutung der Erscheinungen im Unterdruckgebiet zu gut übereinstimmenden Ergebnissen, womit gezeigt ist, daß die physikalische Ursache der Entstehung der Blasen für die Berechnung unwichtig ist und demzufolge keine Fehlerquelle darstellt. Die beiden Modelle ergänzen einander in ihrer Aussagefähigkeit. Anhand des Modells 1 wurde ein numerisches Lösungsverfahren entwickelt und durch die EDV-Programme ENDLA1 und LAGER8 für das endlich breite und das unendlich breite Lager ausgeführt. Das Verfahren beruht auf dem Differenzenverfahren, das anhand einer linearisierten Differentialgleichung den Druckverlauf iterativ bestimmt.

Die erweiterte Schmiertheorie wird durch Nachrechnung experimenteller Untersuchungen am durchsichtigen Lager aus der Literatur bestätigt.

Untersuchungen mit Hilfe der erweiterten Schmiertheorie, unter anderem am wechselnd belasteten Gleitgelenk, zeigen Anwendungsmöglichkeiten und liefern erste Ergebnisse:

Die Gasblasenbildung im Unterdruckgebiet ist eine normale Erscheinung, die nicht um jeden Preis zu bekämpfen ist. Sie muß aber bei der Berechnung und Gestaltung der Lager

berücksichtigt werden. Sie ist dann zu verhindern bzw. auf ein optimales Maß einzuschränken, wenn aufgrund instationärer Belastung das Unterdruckgebiet und der Druckberg einander abwechseln.

Die Folge verzögerter Ölnachströmung, die mit Hilfe der erweiterten Theorie erfaßt werden kann, ist eine verspätete Druckentwicklung, die zu erhöhten Exzentrizitäten führt.

Die erweiterte Schmiertheorie ist anwendbar zur verbesserten Berechnung des hydrodynamischen Druckaufbaus, besonders bei stark instationär belasteten Gleitlagern bzw. bei Lagern mit ungünstigen Schmierungsverhältnissen, da sich hier die Lage und die Ausdehnung des Druckberges ergeben und mit einem teilweise gefüllten Schmierspalt gerechnet werden kann.

Sie ermöglicht Untersuchungen zur Schmiermittelversorgung des Lagers, wobei Ölzufuhrdruck und Schmiernutanordnung optimiert werden können.

Sie kann bei zukünftigen Untersuchungen dazu benutzt werden, den Fehler zu bestimmen, der durch die Annahme eines ständig gefüllten Schmierspalts gemacht wird. Dadurch kann der Gültigkeitsbereich der bisherigen Theorie erfaßt werden, was der Ableitung ingenieurmäßiger Berechnungsmethoden für instationär belastete Gleitlager mit optimalem Aufwand dient.

## Literaturverzeichnis

- [1] Petroff, N., P. Neue Theorie der Reibung, (Urschrift russisch, 1883), Ostwald's Klassiker Nr.218, Akad. Verl. Gesellsch. Leipzig, 1927, S.1-38.
- [2] Reynolds, O. Über die Theorie der Schmierung und ihre Anwendung auf Herrn Beauchamp Towers Versuche, (Urschrift englisch, 1886) Ostwald's Klassiker Nr.218, Akad. Verl. Gesellsch. Leipzig, 1927, S.39-107.
- [3] Sommerfeld, A. Zur hydrodynamischen Theorie der Schmiermittelreibung, Zeitschr. f. Math. u. Phys. Bd.50, 1904, S.97-155 oder Ostwald's Klassiker Nr.218, Akad. Verl. Gesellsch. Leipzig, 1927, S.108-180.
- [4] Nücker, W. Über den Schmiervorgang im Gleitlager, VDI-Forschungsheft 352, Ausgabe B, Band 3, Berlin, 1932.
- [5] Vogelpohl, G. Beiträge zur Kenntnis der Gleitlagerreibung, VDI-Forschungsheft 386, Ausgabe B, Bd. 8. Berlin, 1937.
- [6] Frössel, W. Nachprüfung der hydrodynamischen Schmiertheorie durch Versuche, Forschung auf dem Gebiet des Ingenieurwesens, Bd.9 Nr.6, Berlin, 1938.
- [7] Buske, A. Der Einfluß der Lagergestaltung auf Belastbarkeit und Betriebssicherheit, Stahl u. Eisen, Jg.71 Nr.26, Verlag Stahleisen, Düsseldorf, 1951.
- [8] Kornfeld, M. Elastizität und Festigkeit der Flüssigkeiten, Verlag Technik, Berlin, 1952.
- [9] Cole, J. A.; Hughes, C. J. Oil Flow And Film Extent In Complete Journal Bearings (Ölströmung und Ausdehnung des Schmierfilms in vollumschlossenen Zapflagern), Institut of mechanical engineers, London, 1956.
- [10] Floberg, L. The Infinite Journal Bearing Considering Vaporization (Das unendlich breite Zapfenlager mit Verdampfung), Gumpert Förlag, Göteberg, 1957.
- [11] Hofmann, H. Über einige Einflußfaktoren auf die „Festigkeit“ dünner Ölfilme, Freiburger Forschungsheft A251, S.19-111, Akademie-Verlag, Berlin, 1962.
- [12] Radermacher, K.-H. Das instationär belastete zylindrische Gleitlager – Experimentelle Untersuchung, Diss. TH Karlsruhe, 1962.
- [13] Carl, Th. Das zylindrische Gleitlager unter konstanter und sinusförmiger Belastung – Experimentelle Untersuchung, Diss. TH Karlsruhe, 1962.
- [14] Zurmühl, R. Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1965.
- [15] Gnilke, W. Ein Beitrag zur Berechnung und Konstruktion wechselbelasteter Gleitlager, Diss. TU Dresden, 1966.

- [16] Bronstein, I. N., Semedjajew, K. A.  
Taschenbuch der Mathematik, Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1969.
- [17] Schmitz, G. Vorlesung Strömungslehre II, Universität Rostock, Sektion Schiffstechnik, 1971.
- [18] Schlottmann, D. Vorlesung Konstruktionslehre, Universität Rostock, Sektion Schiffstechnik, 1971.
- [19] Graf, G. Druckaufbau im Schmierfilm statisch und dynamisch belasteter Radialgleitlager – Experimentelle Untersuchung, Diss. TH Karlsruhe, 1971.
- [20] Ogorodnikow, W. B.; Netschiporenko, W. A.; Slastnikowa, G. F.  
Podschipniki skolschenija sudowich porschnewich maschin (Gleitlager in Schiffskolbenmaschinen), Verlag sudostroenije, Leningrad, 1974.
- [21] Spies, K.H. Druckaufbau im statisch belasteten Gleitlager – Experimentelle Untersuchung, Diss. TH Karlsruhe, 1975.
- [22] Wegmann, R. Berechnung von Gleitlagern mit beliebiger Spaltkontur unter Verwendung eines erweiterten Modells für Schmiermittelströmung, Universität Rostock, Sektion Schiffstechnik, WB Konstruktion und Schiffsentwurf, 1975.
- [23] Wegmann, R. EDV-Programm zur Berechnung von Gleitlagern mit beliebiger Spaltkontur, 2.Zwischenbericht, W.-P.-Universität Rostock, Sektion Schiffstechnik, WB Konstruktion und Schiffsentwurf, 1976.
- [24] Pfeiffer, K. Erarbeitung einer Programmbibliothek für die Programme ENDLAG1 und ENDLAG2, Diplom-Arbeit, W.-P.-Universität Rostock, Sektion Schiffstechnik, 1977.
- [25] Wegmann, R. Einfluß der Unrundheit von Zapfen und Lagerschale auf die Tragfähigkeit dynamisch belasteter Gleitlager, Abschlußbericht, W.-P.-Universität Rostock, 1977.
- [26] Wegmann, R. Berechnungsergebnisse der Programme LAGER8, LAGER9, ENDLAG1 und ENDLAG2 (EDV-Listings), W.-P.-Universität Rostock, 1978.

**Nachtrag:** Durch Herrn Prof. Gläser erhielt ich nach Abgabe der Arbeit Kenntnis von der Literaturquelle [27]. Darin wurde das Strömungsmodell mit der Annahme idealisierter Kavitation für das instationär belastete, endlich breite Gleitlager vollständig entwickelt. In meiner Arbeit kam ich zu einem späteren Zeitpunkt ohne Kenntnis dieser Quelle mit Modell 2 zu dem gleichen Ergebnis.

- [27] Olsson, K.-O. Cavitation In Dynamically Loaded Bearings (Kavitation in dynamisch belasteten Lagern), Report N° 26, Chalmers university of technology, Gothenburg, Sweden, 1965.

## Verzeichnis der Abbildungen

	Seite
Bild 1: Unkorrekte Überlagerung der Druckkomponenten Keildruck und Verdrängungsdruck	8
Bild 2: Druck-Volumen-Diagramm des Flüssigkeits-Gas-Gemischs	13
Bild 3: Abgewickelter Schmierpalt	14
Bild 4: Spannungen am Schmiermittelelement	15
Bild 5: Zu- und Abströmungsbedingungen am koordinatenfesten Volumenelement	16
Bild 6: Zunahme im koordinatenfesten Volumenelement	17
Bild 7: Druck-Volumen-Diagramm des Schmiermittels mit idealer Kavitation	20
Bild 8: Zu- und Abströmungsbedingungen am koordinatenfesten Volumenelement im Gebiet $p=0$	21
Bild 9: Zunahme im koordinatenfesten Volumenelement im Gebiet $p=0$	22
Bild 10: Strömungsverhältnisse an der Grenzlinie zwischen Unterdruckgebiet und Druckberg	23
Bild 11: Druckanstieg am Rande des Druckberges	25
Bild 12: Verschiebung der Grenzlinie	25
Bild 13: Druckberggrenze im unendlich breiten Schmierpalt	27
Bild 14: Bedingungen am Druckbergende	28
Bild 15: Spaltgeometrie des achsparallelen Lagers mit kreisrunder Welle und kreisrunder Lagerschale	29

Bild 16: Annäherung der zeitlichen Ableitung $\partial P/\partial T$ und $\partial P_n/\partial T$ unter Verwendung der Hyperbelfunktion $P=a/(T+b)$	34
Bild 17: Näherungsfunktion (Polynom) zur numerischen Differentiation	35
Bild 18: Iterative Bestimmung des Druckverlaufes $P(T)$	36
Bild 19: Modifiziertes Druck-Volumen-Diagramm für Modell 1 bei Gasblasenansammlung im Druckgebiet (im Anhang)	43
Bild 20: Beispiel 1 der Steuerfelder $KX, KZ$ für ein vollumschlossenes, symmetrisches Lager mit Schmierloch	53
Bild 21: Beispiel 2 der Steuerfelder $KX, KZ$ für ein halbumschlossenes, symmetrisches Lager mit beliebig vorgegebenem Druckverlauf am Spaltanfang $X_a$ und Spaltende $X_e$	54
Bild 22: Beispiel 3 der Steuerfelder $KX, KZ$ für ein teilweise umschlossenes, unsymmetrisches Lager mit Schmiernut	55
Bild 23: Druckverläufe $P(X)$ nach der Reynolds'schen Schmiertheorie	56
Bild 24: Druckverlauf $P(X)$ , örtlicher Füllungsgrad $F(X)$ und Flüssigkeitsverteilung $FH(X)$ nach Modell 1 (Flüssigkeits-Gas-Gemisch)	57
Bild 25: Druckverlauf $P(X)$ , örtlicher Füllungsgrad $F(X)$ und Flüssigkeitsverteilung $FH(X)$ nach Modell 2 (Kavitation)	58
Bild 26: Stationärer Druckberganfang nach Modell 1 und Modell 2	59
Bild 27: Veränderlicher Druckberganfang $X_1$ und dessen Verschiebungsgeschwindigkeit $U_1(X_1)$ nach Modell 1 und Modell 2	60
Bild 28: Einfluß der Mischungskonstanten $C$ auf den Druckverlauf $P(X)$ und den örtlichen Füllungsgrad $F(X)$	61
Bild 29: Einfluß der Mischungskonstanten $C$ auf die Tragfähigkeit $S_o$ und den Gesamtfüllungsgrad $F_{ges}$	62
Bild 30.1: Nachgerechnete Experimente von Cole und Hughes [9] Fig.9	63
Bild 30.2: Nachgerechnete Experimente von Cole und Hughes [9] Fig.10	64
Bild 31: Nachrechnung der Versuchsergebnisse von Cole und Hughes [9] Fig.9	65
Bild 32: Nachrechnung der Versuchsergebnisse von Cole und Hughes [9] Fig.10	66
Bild 33: Druckverlauf $P(X,T)$ , örtlicher Füllungsgrad $F(X,T)$ und Flüssigkeitsverteilung $FH(X,T)$ im wechselnd belasteten Gleitgelenk nach Modell 1	67
Bild 34: Tragfähigkeit $S_o(T)$ und Flüssigkeitsmenge $FH_{ges}(T)$ des wechselnd belasteten, unendlich breiten Gleitgelenks nach Modell 1 und Tragfähigkeit $S_o(T)$ nach bisheriger Theorie	68
Bild 35: Variation des Zufuhrdrucks $P_a, P_e$ und der Nutanordnung $X_a, X_e$ am wechselnd belasteten Gleitgelenk nach Modell 1	69
Bild 36: Tragfähigkeit $S_o(T)$ und Flüssigkeitsmenge $FH_{ges}(T)$ des wechselnd belasteten, endlich breiten Gleitgelenks	70
Bild 37: Tragfähigkeit $S_o(T)$ und Flüssigkeitsmenge $FH_{ges}(T)$ eines Gleitlagers mit unrundem Zapfen und stark instationärer Belastung	71
Bild 38: Druckverlauf $P(X)$ und Flüssigkeitsverteilung $FH(X)$ eines Gleitlagers mit unrundem Zapfen und stark instationärer Belastung kurz vor vollständiger Füllung des Spalts	72

## Verzeichnis der Tafeln

Tafel 1: Koeffizientenanalyse der Differentialgleichung (44) für den Druckverlauf nach Modell 1 (im Anhang)	39
Tafel 2: Stationär belastetes, unendlich breites, halbumschlossenes Gleitlager	73
Tafel 3: Einfluß der Mischungskonstanten $C$	74
Tafel 4: Parameter der Nachrechnung der Experimente von Cole und Hughes [9]	75
Tafel 5: Unendlich breites, teilweise umschlossenes Gleitlager mit wechselnder Belastung ohne Drehung	76
Tafel 6: Endlich breites, halbumschlossenes Gleitgelenk mit wechselnder Belastung ohne Drehung	77
Tafel 7: Instationär belastetes Lager mit unrundem Zapfen	78